代数 0 R1 班 作业 1

2022 年 3 月 30 日

1 基础题

本部分题必做.

题 1. 把下列矩阵化为最简行阶梯型 *(默认空格处为 0)*:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

题 2. 用高斯消元法解方程

1. $$\begin{cases} x + 3y + 5z = 6 \\ x - 2y + 4z = -8 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 2x + y - z = 8 \\ -3x - y + 2z = -11 \\ -2x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

题 3. 求线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 8x_4 = 9 \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$$

依赖于参数 λ 的所有解.

题 4. 讨论 λ 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有唯一解, 无穷多解, 无解. 并在有解时求其解.

题 5. 构造一个 3 阶方阵, 其 9 个元素各不相同, 且行简化阶梯形有且只有一个主元.

题 6. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

证明

1. $Ax = b$ 有解当且仅当 $b_1 + b_2 + b_3 = 0$.

2. $Ax = 0$ 的解集是 $\{kx_1 : k \in \mathbb{R}\}$, 其中 $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. 当 $Ax=b$ 有解时, 若 x_0 是一个解, 则解集是 $\{x_0+kx_1 : k\in\mathbb{R}\}$.

题 7. 将下列问题转化为求解线性方程组的问题, 并求解:

1. 设 2×2 矩阵 A 满足 $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$ 且 A 的第一列元素之和为 2, 求所有可能的 A.

2. 空间中有一个平面经过点 $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, 求所有与该平面垂直的向量.

3. 写出通过 5 点 $M_1(0,1)$, $M_2(2,0)$, $M_3(-2,0)$, $M_4(1,-1)$, $M_5(-1,-1)$ 的二次曲线的方程.

题 8. 如果对任何 b, 线性方程组 $Ax=b$ 与 $Cx=b$ 都有相同的解集, 是否一定有 $A=C$?

2 思考题

本部分题选做, 不计成绩.

题 9. 若 A, A' 均为 $m\times n$ 矩阵, b, b' 为 m 维向量, 方程 $Ax=b$ 与 $A'x=b'$ 的解集相同且**非空**, 是否 (A', b') 一定可由 (A, b) 经过行变换得到?