# 代数 0 R1 班 作业 2

2022 年 4 月 7 日

## 1 基础题

本部分题必做.

**题 1.** 计算矩阵乘法:

1. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 9 \\ -3 & 3 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 9 & -2 & 0 \\ 11 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

2. $\begin{bmatrix} X & 1 & 0 \\ X^2+X & 2 & 0 \\ 0 & X & X-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & X & -X \\ 8 & -X-2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$ $(\theta, \varphi \in \mathbb{R})$.

4. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^6$. (为什么?)

**题 2.** 计算如下矩阵的逆矩阵:

1. $\begin{bmatrix} 1 & a & z \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

2. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $ad - bc \neq 0$;

*3.* $\begin{bmatrix}17 & 8 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 8 & 2\end{bmatrix}$. 利用你计算的结果解方程 $\begin{bmatrix}17 & 8 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 8 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}18\\ 36\\ 0\end{bmatrix}$.

**题 3.** 求下述 $n$ 阶矩阵的逆:

$$\begin{pmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{pmatrix}$$

(其中 $a_i \neq 0$.)

提示: 有时解线性方程组比求逆矩阵更容易.

**题 4.** 设矩阵 $A, B$ 的行数相等. 证明: 存在矩阵 $X$ 使得 $AX = B$ 当且仅当 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}((A, B))$. (其中 $(A, B)$ 表示将两个矩阵拼接得到的矩阵.)

**题 5.** 对于 $n$ 阶方阵 $A, B, C$, 证明

$$\mathrm{rank}(ABC) \geq \mathrm{rank}(AB) + \mathrm{rank}(BC) - \mathrm{rank}(B).$$

提示: 对如下分块矩阵作行 (列) 变换.

$$\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & ABC\end{pmatrix}.$$

**题 6.** 设 $A$ 是二阶矩阵, 若有 $n > 2$, 使 $A^n = O$, 求证: $A^2 = O$.

**题 7.** 设 $A$ 为 $n$ 阶实反对称阵, 即 $A^T = -A$, 证明: $I_n - A$ 是可逆的.

**题 8.** 证明: 与所有 $n$ 阶方阵均可交换的 $n$ 阶方阵必为纯量方阵, 即形如 $\lambda I, \lambda \in \mathbb{C}$.

**题 9.** 设有 $n$ 个矩阵 $A^{(1)}, \cdots, A^{(n)}$(注意, 此处上标不是乘方), 其大小未知, 但满足乘积 $P = A^{(1)}A^{(2)}\cdots A^{(n)}$ 有意义. 记 $A^{(k)}$ 的第 $i$ 行第 $j$ 个元素为 $a_{ij}^{(k)}$, $P$ 的第 $i$ 行第 $j$ 个元素为 $p_{ij}$. 请用 $a_{ij}^{(k)}$ 表示 $p_{ij}$.

提示: 答案并不复杂. $n = 2$ 时的答案为

$$p_{ij} = \sum_k a_{ik}^{(1)} a_{kj}^{(2)}.$$

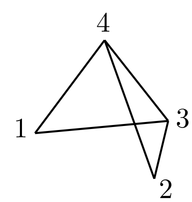
**题 10.** 设 $G=(V,E)$ 是一个图，顶点集 $V=\{1,2,\cdots,n\}$. $n$ 阶矩阵 $A$ 是 $G$ 的邻接矩阵，即 $A$ 的元素 $a_{ij}$ 等于顶点 $i$, $j$ 之间边的数量.

证明 $A^k$ 的第 $i$ 行第 $j$ 个元素等于 $i$, $j$ 之间长度为 $k$ 的道路的数量. *(所谓 $i,j$ 之间长度为 $k$ 的道路，是指 $V$ 的一列元素 $i=v_0,v_1,\cdots,v_k=j$ 和 $E$ 的一列元素 $e_1,\cdots,e_k$, 满足 $e_h$ 的顶点为 $v_{h-1},v_h$.)*

提示*:* 使用问题 *9*的结果.

**题 11.** 

1. 求下图 $G$ 中从顶点 1 到顶点 2 的长度为 8 的道路的数量.
2. 证明对任意正整数 $n$, $G$ 中从顶点 2 到顶点 3 的长度为 $n$ 的道路的数量是完全平方数.




**题 12.** 回顾第一次课里介绍的 *Google* 的 *PageRank* 算法. 对任意一个有向图 $N$, 其对应的线性方程组是否一定有非零解?

提示*:* 这个方程可以表示为 $Ax=0$, $A$ 是某个方阵. 考虑 $A^T$ 以及方程 $A^Ty=0$.

## 2 思考题

本部分题选做, 不计成绩.

**题 13.** 课上我们研究过 $G(m,n)$ 的分解中 $\mathbb{R}^i$ 的个数，记为 $b_i$, 验证 $b_i=b_{m(n-m)-i}$.

**题 14.** 不用矩阵，而是用线性空间的观点证明问题 *5*.

**题 15.** 你能对非方形的矩阵定义逆吗? *(*可参考 *Penrose* 伪逆.*)*

**题 16.** 考虑 $M\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[X,X^{-1}])$. 证明，存在 $P\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[X])$ 及 $Q\in$

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[X^{-1}])$ 使得

$$QMP = \begin{bmatrix} X^{k_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X^{k_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X^{k_n} \end{bmatrix}$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_n \in \mathbb{Z}$ 及 $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_n$.