代数 0 R1 班 作业 3

2022 年 4 月 13 日

不加说明的情况下, 都是 $\mathbb{R}$ 上的矩阵和线性空间.

1 基础题

本部分题必做.

题 1. *判断下述向量组是否线性无关, 并找它们生成的子空间的一组基:*

1. $a_1 = (1, 2, 3), a_2 = (3, 6, 7)$;
2. $a_1 = (2, -3, 1), a_2 = (3, -1, 5), a_3 = (1, -4, 3)$;
3. $a_1 = (4, -5, 2, 6), a_2 = (2, -2, 1, 3), a_3 = (6, -3, 3, 9), a_4 = (4, -1, 5, 6)$;
4. $a_1 = (1, 0, 0, 2, 5), a_2 = (0, 1, 0, 3, 4), a_3 = (0, 0, 1, 4, 7), a_4 = (2, -3, 4, 11, 12)$.

题 2. *给定一个向量组*

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), i = 1, 2, \cdots, s, s \leq n$$

证明, 如果

$$|a_{jj}| > \sum_{1 \leq i \leq s, i \neq j} |a_{ij}|, j = 1, \cdots, s,$$

则该向量组线性无关.

题 3. *证明每个秩为 1 的矩阵有下述分解*

$$\begin{bmatrix} b_1c_1 & b_1c_2 & \cdots & b_1c_n \\ b_2c_1 & b_2c_2 & \cdots & b_2c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_mc_1 & b_mc_2 & \cdots & b_mc_n \end{bmatrix} = B^T \cdot C$$

其中 $B=(b_1,b_2,\cdots,b_m), C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 都是行向量组.

题 4. 求矩阵 A, 使得 A 以如下向量组生成的子空间为解空间, 并求解空间的一组基:

1. $\{(1,-1,1,0)^T,(1,1,0,1)^T,(2,0,1,1)^T\}$;
2. $\{(1,-1,1,-1,1)^T,(1,1,0,0,3)^T,(3,1,1,-1,7)^T\}$.

题 5. 对于空间 $\mathbb{R}^4$ 的如下向量组生成的线性子空间, 求两个子空间的交的维数, 并求交的一组基. (请思考怎样计算最快.)

1. $S=\operatorname{span}\{(1,2,0,1),(1,1,1,0)\}, T=\operatorname{span}\{(1,0,1,0),(1,3,0,1)\}$;
2. $S=\operatorname{span}\{(1,1,1,1),(1,-1,1,-1),(1,3,1,3)\}$,
   $T=\operatorname{span}\{(1,2,0,2),(1,2,1,2),(3,1,3,1)\}$.

题 6. 回顾课上域的定义. 证明, 加法逆和乘法逆都是唯一的.

题 7. 对 $n\times n$ 矩阵 $X=(x_{ij})_{1\le i,j\le n}$, 定义其 “迹” 为

$$\operatorname{tr}(X)=x_{11}+x_{22}+\cdots+x_{nn}.$$

1. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times m$ 矩阵, 证明 $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$.
2. 证明不存在 $n\times n$ 的矩阵 A,B 使得 $AB-BA=I_n$.

题 8. 证明线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解当且仅当 $\begin{bmatrix}A^T\\ \mathbf{b}^T\end{bmatrix}\mathbf{y}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ 1\end{bmatrix}$ 无解.

题 9. 对于 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 V,W, 证明

$$\dim(V\cap W)+n\ge\dim V+\dim W.$$

2 思考题

本部分题选做, 不计成绩.

题 10. 证明反对称矩阵的秩为偶数. (称方阵 A 是反对称阵, 如果 $A^T=-A$).

题 11. 设 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ 是一个可逆方阵. A 的一个 LDU 分解指 $A=LDU$, 其中 L 是一个主对角线均为 1 的下三角矩阵, U 是一个主对角线均为 1 的上三角矩阵, D 是一个可逆的对角矩阵. 记 $A_m=(a_{ij})_{1\le i,j\le m}$. 证明,$A$ 存在 LDU 分解当且仅当对每个 $1\le m\le n$, A_m 都可逆, 并且当 A 存在 LDU 分解时, 其 LDU 分解是唯一的. (注: 这 A_m 称做 A 的顺序主子阵。请用这个结论说服自己,"大部分" 矩阵都具有 LDU 分解, 思考如何来定义 "大部分".)

题 12. 对于第 7 题第二问, 如果 A 和 B 换成有限域 $\mathbb{F}_p$ 上的 n 阶方阵, 结论是否依然成立。试找出对哪些 n 存在这样的 A 和 B, 并举出例子.