代数 0 R1 班 作业 4

2022 年 4 月 21 日

从本次作业开始, 如无特殊说明, 向量空间指一般域 $\Bbbk$ 上的有限维向量空间.

1 基础题

本部分题必做.

题 1. 设 $V = C^\infty(\mathbb{R})$, $T : f \mapsto f'$, 对于给定的 B, C, 已知 $T(\operatorname{span} B) \subset \operatorname{span} C$, 求矩阵 $[T]_B^C$:

1. $B = C = (e^x, e^{2x}, e^{3x})$;
2. $B = (1, x, x^2, x^3)$, $C = (1, x, x^2)$;
3. $B = C = (e^x \sin 2x, e^x \cos 2x, xe^x \sin 2x, xe^x \cos 2x)$

题 2. 设 $V = C^\infty(\mathbb{R})$, 已知两组元素 B, C 满足 $\operatorname{span} B = \operatorname{span} C$, 求转移矩阵 $P_{C \leftarrow B}$:

1. $B = (1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x)$, $C = (1, \cos x, \cos^2 x, \cos^3 x)$.
2. $B = (1, x, x^2, x^3)$, $C = (1, x - a, (x - a)^2, (x - a)^3)$ ($a \in \mathbb{R}$ 为常数)

题 3. 设 V 是一个有限维 $\Bbbk$-线性空间, B 是 V 的一组基, $T \colon V \to V$ 是一个线性变换。

1. 证明 $Trace([T]_B^B)$ 与 B 的选取无关。(也记作 $Trace(T)$)
2. 对 $V = M_{m\times n}(\Bbbk)$, $A = (a_{ij})_{m\times m}$, $C = (C_{ij})_{n\times n}$, 用式子 $T(X) = AXC$ 定义映射 T. 证明 T 是一个线性变换。求 T 在你选取的一组基下的矩阵和 $Trace$.

题 4. 课上学习过域的概念, 环的概念与之相近: 称 $(R,+,\cdot)$ 是一个环, 如果

1. $(R,+)$ 是交换群, 即
   - 对任何 $x,y,z\in R,(x+y)+z=x+(y+z)$;
   - 对任何 $x,y\in R,x+y=y+x$;
   - 存在加法单位 $0_R\in R$, 使得对任意 $x\in R,x+0_R=x=0_R+x$;
   - 对任何 $x\in R$, 存在 $y\in R$ 使得 $x+y=0_R=y+x$.
2. $(R,\cdot)$ 是半群, 即
   - 对任何 $x,y,z\in R,(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$;
   - 存在乘法单位 $1_R\in R$, 使得对任意 $x\in R,x\cdot 1_R=x=1_R\cdot x$.
3. 乘法有双线性性, 即
   - 对任何 $x,y,z\in R,x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$;
   - 对任何 $x,y,z\in R,(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$.

验证 $M_n(\Bbbk)$ 和 $\Bbbk[X]$ 具有环结构.

题 5. 定义: 称 (A,f) 是一个 $\Bbbk$-代数, 其中

1. A 是一个环 (不一定交换);
2. $f\colon\Bbbk\to A$ 是一个环同态, 即
   - $f(x+y)=f(x)+f(y)$;
   - $f(xy)=f(x)f(y)$;
   - $f(0_\Bbbk)=0_A$;
   - $f(1_\Bbbk)=1_A$;
3. $f(r)v=vf(r)$, 对任何 $r\in\Bbbk,v\in A$.

对 $r\in\Bbbk,v\in A$, 定义 $r\cdot v=f(r)v$. 验证, 这给出 A 的 $\Bbbk$-线性空间结构.

给出矩阵环 $M_n(\Bbbk)$ 和多项式环 $\Bbbk[X]$ 的 $\Bbbk$-代数结构.

题 6. 固定集合 Ω, 记 $\mathcal{P}(\Omega)$ 为其幂集, 即其全体子集构成的集合. 在 $\mathcal{P}(\Omega)$ 上, 定义

- 加法: $A+B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$;
- 乘法: $A\cdot B=A\cap B$.

利用上述提示, 尝试给出

1. $\mathcal{P}(\Omega)$ 上的环结构. 加法单位和乘法单位分别是什么?
2. $\mathcal{P}(\Omega)$ 上的 $\mathbb{F}_2$-代数结构, 其中 $\mathbb{F}_2$ 是二元域.

题 7. 对子空间 $W\subset V$, 定义 $\operatorname{codim}(W)=\dim V-\dim W$. 设

$$V_0\xrightarrow{A_1}V_1\xrightarrow{A_2}\cdots\xrightarrow{A_m}V_m$$

是一串线性映射, 证明

$$\sum_{i=1}^{m}\dim\ker A_i-\sum_{i=1}^{m}\operatorname{codim}\operatorname{im}A_i=\dim V_0-\dim V_m.$$

题 8. 假设 A 是 $M_n(\mathbb{C})$ 的 $\mathbb{C}$-子空间. 如果 A 中没有幂零元, 证明 $\dim_{\mathbb{C}}A\leq\frac{n^2+n}{2}$.

注: A 是 $M_n(\mathbb{C})$ 幂零元, 意指 $A\neq 0$ 且存在 $N\in\mathbb{Z}_+$ 使得 $A^N=0$.

题 9. 设 K 是无限域, V 是 K 上有限维向量空间, $W_1,W_2,\cdots,W_n$ 是 V 的真子空间, 证明:

$$W_1\cup W_2\cup\cdots\cup W_n\neq V.$$

题 10. 考虑 *“Shifted Legendre polynomial”*

$$\widetilde{P}_n(x)=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-x)^n$$

证明 $\widetilde{P}_0,\widetilde{P}_1,\cdots$ 构成 $\mathbb{R}[x]$ 的一组基.

题 11. $C^\infty(\mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$ 上的光滑函数) 是 (无穷维) $\mathbb{R}$-线性空间. 证明, 函数

$$\sin(t),\sin(2t),\cdots,\sin(Nt)$$

线性无关.

题 12.

- 验证, 在通常的乘法下, $\mathbb{R}$ 成为 $\mathbb{Q}$-线性空间.
- 取 $0\neq\alpha\in\mathbb{R}$. 对 $\beta\in\mathbb{R}$, 证明 α,β 是 $\mathbb{Q}$-线性无关的等价于 $\frac{\beta}{\alpha}\notin\mathbb{Q}$.
- 验证 $\mathbb{R}$ 作为 $\mathbb{Q}$-线性空间是无穷维的.

2 思考题

本部分题选做, 不计成绩.

题 13. 假设 A 是 $M_n(\mathbb{C})$ 的 $\mathbb{C}$-子空间, 并且在矩阵的乘法下封闭. 如果 A 中没有幂零元, 证明 $\dim_{\mathbb{C}} A \le n$.

参考: 半单代数的结构, Jacobson radical etc.

题 14. 设 F 是有限域, V 是 F 上的 n 维向量空间. 设 $0 \le k \le n$. 证明 V 的 k 维子空间的数目等于 $n-k$ 维子空间的数目. *(通常我们将 k 维子空间的集合记做 Grassmannian $G(k,V)$ 或者 $G(k,n)$)*

*(习题课上我们计算了这个数目, 但是请不要直接使用这个数目, 而是给出一个一一对应. 请进一步思考, V 的全体 k 维子空间与全体 $n-k$ 维子空间之间能否建立**自然**的一一对应?)*

题 15. 设 F 是 q 元有限域, V 是 F 上的 n 维向量空间.

定义 V 上的一个**旗子** *(flag)* 是一列子空间 $0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V$, 满足 $\dim V_k = k$.

求旗子的数目. 这个数是否能表示为 q 的非负整系数多项式? 找到这个多项式的系数的几何含义, 并说明你用有限域的方法证明了某一列组合数的计数方法。(类似的现象在习题课已经讲过的对象 $G(k\,n)$ 出现过, 你还能将这个方法推广到哪些对象？请写下对应的类似“旗子”的定义, 这些对象之间有没有什么关系 ?)

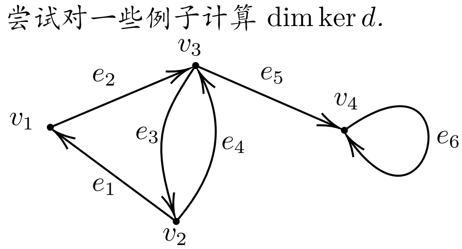
题 16. 设 $G = (V, E)$ 是一个有向图, 带有映射 $s, t : E \to V$, $s(e), t(e)$ 分别表示有向边 e 的起点和终点.

记 $\mathbb{R}\{V\}$ 为形如 $\sum_{v \in V} x_v \cdot v \, (x_v \in \mathbb{R})$ 的表达式构成的线性空间; 类似地有 $\mathbb{R}\{E\}$.

定义线性映射 $d : \mathbb{R}\{E\} \to \mathbb{R}\{V\}$, 使得对于 $e \in E$, $d(e) = t(e) - s(e)$.

那么 $\dim \ker d$ 给出了有向图中的什么信息?

尝试对一些例子计算 $\dim \ker d$.



有一个著名的问题, 问下面的数字是按什么规律分组的.

1,2,3,5,7;　0,4,6,9;　8.

答案是, 第一组数字没有“洞”, 第二组数字有一个“洞”, 第三组数字有两个“洞”.

上面的图 G 有多少个洞?