代数 0 R1 班 作业 5

2022 年 4 月 28 日

1 基础题

本部分题必做.

题 1. 计算下列行列式:

1.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & -3 \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z & x & 1 \\ z & x & y & 1 \\ \frac{z+x}{2} & \frac{x+y}{2} & \frac{y+z}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

3.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

4. 因式分解

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

5. *Vandermonde* 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1^{n-1} & X_2^{n-1} & \cdots & X_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

6.

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

其中 $s_k = X_1^k + X_2^k + \cdots X_n^k$.

7. 在复数域 $\mathbb{C}$ 上, 将关于 n 个变量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的多项式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

分解为不可约因子乘积.

8. $\det(A^*)$, 其中 A^* 是方阵 A 的伴随.

9. $(n+1) \times (n+2)$ 的矩阵

$$A = (a_{ij}) = \left(\binom{j-1}{i-1} \right), 1 \le i \le n+1, 1 \le j \le n+2,$$

A_k 为 A 去掉第 k 列得到的矩阵, 计算 $\det(A_k)$.

10. 在微分几何中, 为了计算函数图像的子流形测度, 我们会碰到如下实际问题*:* 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 & \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1} & 1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & 1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \end{vmatrix},$$

其中 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数.

题 2. 记 X^* 为 X 的伴随, X^T 为 X 的转置. 设 A, B 是同阶方阵, 证明*:*

- $(AB)^* = B^*A^*$*;*
- $(A^T)^* = (A^*)^T$*;*
- 还假设 A 可逆, 则 A^* 也可逆, 且 $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

题 3. 考虑一串线性映射

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} V_n \xrightarrow{d_n} V_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} V_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots$$

其中 V_k 都是有限维 $\Bbbk$-向量空间, 并且对任何 $k \in \mathbb{Z}$, $d_{k-1} \circ d_k = 0$.

- 记 $Z_k = \ker d_k, B_k = \operatorname{im} d_{k+1}$, 证明 B_k 是 Z_k 的子空间, 由此定义商空间 $H_k = Z_k/B_k$.
- 设 $\{f_n\colon V_n \to V_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一串线性映射, 满足对任何 n, $d_n \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n$, 则 $f_n(Z_n) \subset Z_n, f_n(B_n) \subset B_n$.
- 利用商空间的性质说明, f_n 诱导了线性映射 $f_{n_*}\colon H_n \to H_n$, 使得如下图表交换*:*

$$\begin{tikzcd} Z_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\pi_n"] & Z_n \arrow[d, "\pi_n"] \\ H_n \arrow[r, "f_{n_*}"] & H_n \end{tikzcd}$$

  其中 $\pi_n\colon Z_n \to H_n = Z_n/B_n$ 是商空间的投影映射.

- *(Hopf* 迹公式*)* 设对某个 $N \in \mathbb{Z}_+$, 当 $|n| > N$ 时, $V_n = 0$. 证明

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \operatorname{tr}(f_n\colon V_n \to V_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \operatorname{tr}(f_{n_*}\colon H_n \to H_n).$$

  注意这里操作的实际上是有限和, 不涉及级数收敛问题.

题 4. 记 $w = e^{-\frac{2\pi i}{n}}$. 证明矩阵

$$W = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \cdots & \omega^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \omega^{3(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

可逆, 并求 W^{-1}.

题 5. *(直和的泛性质)* 设 V, W 是两个 $\Bbbk$-线性空间, 则我们有包含映射

$$V \xrightarrow{\iota_V} V \oplus W, v \mapsto (v, 0),$$

$$W \xrightarrow{\iota_W} V \oplus W, w \mapsto (0, w),$$

这里 $V \oplus W$ 是 V 和 W 的外直和. 证明, 对任何线性空间 U 以及线性映射 $f\colon V \to U, g\colon W \to U$, 存在唯一的线性映射 $f \oplus g\colon V \oplus W \to U$, 使得如下图表交换:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\iota_V"] \arrow[dr, "f"'] & V \oplus W \arrow[d, dotted, "f\oplus g"] & W \arrow[l, "\iota_W"'] \arrow[dl, "g"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

即 $(f \oplus g) \circ \iota_V = f, (f \oplus g) \circ \iota_W = g$.

强调, 既要证明存在性, 又要证明唯一性.

题 6. 我们来考虑多个空间的内直和. 固定 Ω 是一个 $\Bbbk$-向量空间,$V_1, V_2, \cdots, V_n$ 是其子空间. 称 $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ 是 *(内)* 直和, 如果对任何 j,

$$V_j \cap (V_1 + \cdots + V_{j-1} + V_{j+1} + \cdots + V_n) = 0,$$

记为 $\bigoplus_{i=1}^n V_i$.

考虑 $\Omega = \Bbbk^5$, 给出其三个子空间 V_1, V_2, V_3, 满足两两交为 0, 但 $V_1 + V_2 + V_3$ 不是直和.

思考, 为什么要这样定义内直和?

结论. 若 $\Bbbk$ 上的 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = A$, 则

- $\operatorname{im} A = \ker(I_n - A)$.

- $\Bbbk^n = \ker A \oplus \operatorname{im} A$.

如下两道题是上述结论的推广.

对于多项式 $f(X) = \sum_n a_n X^n$ 与方阵 A, 定义 $f(A) = \sum_n a_n A^n$.

题 7. 设 f, g 是 $\Bbbk$ 上的多项式, $(f, g) = 1$, 即 f, g 互素. 若 $\Bbbk$ 上的 n 阶矩阵 A 满足 $f(A)g(A) = 0$, 证明

- $\operatorname{im} f(A) = \ker g(A)$.
- $\Bbbk^n = \ker f(A) \oplus \ker g(A)$.

题 8. 若线性变换 φ 满足 $\varphi^2 = \varphi$, 则称之为**幂等变换**. 设 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 是 n 维 $\Bbbk$-线性空间 V 上的幂等变换, 满足 $\sum_{i=1}^k \operatorname{rank} \varphi_i = n$, $\sum_{i=1}^k \varphi = \mathrm{id}$. 证明

- $\varphi_i \varphi_j = 0\,(i \neq j)$;
- $V = \bigoplus_{i=1}^k \operatorname{im} \varphi_i$.

题 9. *(Cayley–Hamilton 定理)* 对 $A \in M_n(\Bbbk)$, 称

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) \in \Bbbk[\lambda]$$

为其特征多项式, 证明 $P_A(A) = 0$.

提示: 考虑 $\Bbbk[\lambda]$ 上的矩阵 $B(\lambda) = \lambda I_n - A$, 则 $p_A(\lambda) I_n = B(\lambda)^* B(\lambda)$, 其中 $B(\lambda)^*$ 表示伴随矩阵.

题 10. *(Siegel 线性无关判据)* 设 $x_1, x_2, \cdots x_k \in \mathbb{R}$ 不全为 0.

$$A^{(n)} = \left(a_{ij}^{(n)}\right)_{1 \leq i,j \leq k}$$

是一列 $k \times k$ 矩阵, 满足 $A^{(n)}$ 都可逆, 并且 $a_{ij}^{(n)} \in \mathbb{Z}$. 令

$$\begin{bmatrix} L_1^{(n)} \\ \vdots \\ L_k^{(n)} \end{bmatrix} = A^{(n)} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix},$$

再记

$$H_n = \max_{1 \leq i,j \leq k} \left| a_{ij}^{(n)} \right|, \epsilon_n = \max_{1 \leq i \leq k} \left| L_i^{(n)} \right|.$$

假设 $\lim\limits_{n \to \infty} H_n^{k-2} \epsilon_n = 0$, 证明 $x_1, \cdots, x_k$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关.

题 11. 对域 $\Bbbk$ 上的同阶方阵 A, B, 我们知道 $\det\left(AB^T\right) = \det(A)\det(B)$, 例如

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} & a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

然而, 这一点高度依赖于 $\Bbbk$ 的交换性.

在不一定交换的环上, 我们也可以利用组合的展开式定义行列式: 对 $A = (A_{i,j})_{1\le i,j\le n}$, 规定

$$|A| = \det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1),1} A_{\sigma(2),2} \cdots A_{\sigma(n),n}.$$

现在考虑 x_{ij} 和 $\dfrac{\partial}{\partial x_{ij}}, 1 \le i, j \le n$, 我们知道这 $2n^2$ 个元素生成了一个不交换的环: 例如

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}} x_{ij} - x_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} = 1.$$

- 计算

  $$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{11}} & \frac{\partial}{\partial x_{12}} \\ \frac{\partial}{\partial x_{21}} & \frac{\partial}{\partial x_{22}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}.$$

  这是所谓 *Bernstein–Sato* 多项式的一个 *naive* 例子.

- 证明

  $$\begin{vmatrix} x_{11}\frac{\partial}{\partial x_{11}} + x_{12}\frac{\partial}{\partial x_{12}} + 1 & x_{11}\frac{\partial}{\partial x_{21}} + x_{12}\frac{\partial}{\partial x_{22}} \\ x_{21}\frac{\partial}{\partial x_{11}} + x_{22}\frac{\partial}{\partial x_{12}} & x_{21}\frac{\partial}{\partial x_{21}} + x_{22}\frac{\partial}{\partial x_{22}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{11}} & \frac{\partial}{\partial x_{12}} \\ \frac{\partial}{\partial x_{21}} & \frac{\partial}{\partial x_{22}} \end{vmatrix}.$$

  可以看见, 左上角多出一个 “+1” 的修正项. 这是所谓 *Capelli* 等式的特例.

2 思考题

没有新思考题, 继续做之前的.

劳动节快乐:)