代数 0 R1 班 作业 6

2022 年 5 月 11 日

1 基础题

本部分题必做.

题 1. 判断下列矩阵 A 是否可在复数域上对角化. 在可对角化的情形, 给出可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵.

1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

题 2. 已知 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 的特征值集合 (按重数计), $f(A)$ 的特征值集合 (按重数计) 是什么? 其中 $f \in \mathbb{C}[X]$ 是一个多项式.

题 3. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 满足 $\mathrm{tr}(A^k) = 0$, 对任何 $0 < k \leq n$. 证明 $A^n = 0$.

题 4. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. 若存在 $P \in M_n(\mathbb{C})$ 使得 $P^{-1}AP = B$, 证明存在 $Q \in M_n(\mathbb{R})$ 使得 $Q^{-1}AQ = B$.

题 5. 设 $\mathcal{T} \subset M_n(\mathbb{C})$ 是一些交换矩阵构成的集合, 即对任何 $T_1, T_2 \in \mathcal{T}, T_1T_2 = T_2T_1$. 证明, $\mathcal{T}$ 可以同时上三角化, 即存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, 使得对任何 $T \in \mathcal{T}, P^{-1}TP$ 是上三角矩阵.

题 6. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ 满足 $AB - BA = A$, 证明 A, B 有公共的特征向量.

题 7. 设 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in M_2(\mathbb{k})$, 证明

- $[[x_1, x_2]^2, x_3] = 0$;
- $[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4] + [x_1, x_4][x_2, x_3] = 0$.

其中 $[X, Y] = XY - YX$.

题 8. 在 $\mathbb{C}^n$ 上定义循环卷积运算为

$$(x * y)_k = \sum_{j=0}^{n-1} x_{k-j} y_j.$$

其中 $k-j$ 表示模 n 的指标。证明 DFT 将卷积变为乘积, 即 $DFT(x*y)_k = DFT(x)_k \cdot DFT(y)_k$. 试将多项式的乘法解释为系数的循环卷积.

2 思考题

本部分题选做, 不计成绩.

题 9. 设 $\operatorname{char} \mathbb{k} = 0, X, Y \in M_2(\mathbb{k})$, 证明

$$\operatorname{tr}(XXYXXYY) = \operatorname{tr}(XXYYXXY).$$

题 10. 在 n 阶方阵的集合 $M_n(\mathbb{C})$ 上我们已经发现 $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ 和 $\det(AB) = \det(BA)$. 请试着找出是否存在其他的关于方阵元素的多项式函数 f, 满足 $f(AB) = f(BA)$. 能否证明满足这种条件的函数都由你找到的这些函数做加法和乘法得到。