代数 0 R1 班 作业 7

2022 年 5 月 19 日

1 基础题

本部分题必做.

题 1. 证明循环矩阵

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$$

(在复数域上) 可对角化. 所有变量都是复数.

题 2. 设 $\varphi\colon V \to V$ 是 n 维复向量空间 V 上的线性变换. 证明, φ 可对角化当且仅当对任何特征值 λ_0,

$$\ker(\lambda_0 \operatorname{id} - \varphi) \cap \operatorname{im}(\lambda_0 \operatorname{id} - \varphi) = 0.$$

题 3. 设 n 阶复矩阵 A 的极小多项式为 $m(\lambda), \deg m(\lambda) = s$. 令 $B = (b_{ij})$ 是 s 阶方阵, 其中 $b_{ij} = \operatorname{tr}(A^{i+j-2})$. 证明, A 可对角化当且仅当 B 可逆.

题 4. 用 *Gram–Schimdt* 正交化, 将 $w_1, \cdots, w_n$ 化为 $\operatorname{span}\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ 的标准正交基.

1. $w_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix}.$

2. $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix}.$

题 5. 对矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ 作 QR 分解。

题 6. 已知 y 是关于 x 的函数，实验测得 y 关于 x 变化的一些数据点为 $(x_1, y_1) = (1, 2), (x_2, y_2) = (0, 1), (x_3, y_3) = (-1, 3), (x_4, y_4) = (2, 5), (x_5, y_5) = (3, 6)$. 求实系数二次函数 $y(x) = a + bx + cx^2$ 使得 $\sum_i |y(x_i) - y_i|^2$ 最小。

题 7. 证明若非零向量组 $v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n$ 相互正交，即 $v_i \neq 0, \forall i$, 且 $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \forall i \neq j$, 则该向量组线性无关。

题 8. 对于任意的 $A \in M_n(\Bbbk)$ 满足 $A^2 = I$, 是否都有 A 可对角化，如果不是请举出例子。

题 9. 证明 A 和 A^T 的所有特征值都相同，且有相同的代数重数和几何重数。(请思考 A 和 A^T 是否一定相似，为什么？)

题 10. 假设 $A = (a_{ij})$ 是复方阵。定义 $D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i, 1 \leq j \leq n} |a_{ij}|\}$ 为复平面上的圆盘。证明 A 的特征值落在这些圆盘的并里 $\cup_i D_i$。(这称为 *Gershgorin circle theorem*，有更精细的估计在哪些圆盘里有多少特征值的版本。在估计特征值范围时还可以用对角矩阵 Λ 共轭作用于 A，即考虑 $\Lambda^{-1} A \Lambda$ 来改变圆盘的位置，请思考如何选取 Λ 来得到更精细的估计。)

题 11. 分以下步骤证明课上关于 *Markov* 链的定理。假设 A 是 n 阶随机矩阵，且每个元素严格大于零。x 是一个概率向量。

1. A^T 有特征值 1 和特征向量 $x = (1, \cdots, 1)^T$.

2. A^T 的其他特征值满足 $|\lambda| < 1$，且特征值 1 的几何重数是 1.

3. 证明特征值 1 的代数重数是 1. *(提示：用上三角化和 A^k 是概率矩阵)*

4. 证明 $\lim_{k \to \infty} A^k$ 存在。*(提示：用上三角化，请尽量使用课堂上已经证明的结论。)*

5. 证明 $y=\lim_{k\to\infty}A^kx$ 存在，且与 x 的选取无关。如果需要求出 y 的每个分量到小数点后 m 位，需要的 k 多大？给出 k 关于 A 的特征值和 n 的估计。

请看一些定义.

设 V 是 $\mathbb{R}$-向量空间 (不一定有限维), $B(\cdot,\cdot)\colon V\times V\to\mathbb{R}$ 是一个映射.

- 称 B 是双线性型, 如果对任何 $u,v,w\in V, a,b\in\mathbb{R}$, 有

$$B(au+bv,w)=aB(u,w)+bB(v,w),$$

$$B(u,av+bw)=aB(u,v)+bB(u,w).$$

  以下总假定 B 是一个双线性型.

- 称双线性型 B 是对称的, 如果对任何 $v,w\in V$,

$$B(v,w)=B(w,v).$$

  以下总假定 B 是一个对称双线性型.

- 称对称双线性型 B 是半正定的, 如果对任何 $v\in V$,

$$B(v,v)\geq 0.$$

- 称对称双线性型 B 是正定的, 如果对任何 $0\neq v\in V$,

$$B(v,v)>0.$$

  此时也称 B 是 V 上的一个内积.

题 12. 考虑 $A\in M_n(\mathbb{R})$. 证明

$$B_A\colon\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},(v,w)\mapsto v^TAw$$

是一个双线性型. B_A 什么时候是对称的双线性型？

题 13. 设 V 是一个 $\mathbb{R}$-向量空间,B 是其上一个对称双线性型. 定义

$$R=\{r\in V: B(r,v)=0,\forall v\in V\}$$

称为 B 的根 *(radical)*.

- 证明, R 是 V 的线性子空间.

  于是我们可以考虑商空间 $\bar{V} = V/R$.

- 构造 $\bar{V}$ 上的对称双线性型 $\bar{B}$, 使得对任何 $v, w \in V$,

  $$\bar{B}(\bar{v}, \bar{w}) = B(v, w),$$

  其中 $\bar{v}, \bar{w}$ 分别为 v, w 在 $\bar{V}$ 中的像.

- $\bar{V}$ 关于 $\bar{B}$ 的根是什么?

题 14. 考虑 $\mathbb{R}$-向量空间 $M_n(\mathbb{R})$ 上的迹形式 *(Hilbert–Schmidt 内积):*

$$B(X, Y) = \mathrm{tr}(X^T Y).$$

证明, $B(\cdot, \cdot)$ 定义了 $M_n(\mathbb{R})$ 上的一个对称正定双线性型 *(即一个内积)*.

题 15. 设 V 是一个有限维 $\mathbb{R}$-向量空间, 配有内积 $B(\cdot, \cdot)$. 证明

$$V \to V^*, v \mapsto [w \mapsto B(w, v)]$$

是线性同构, 其中 $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$.