代数 0 R1 班 作业 8

2022 年 5 月 25 日

1 基础题

本部分题必做.

题 1. 设 W 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 证明 $(W^\perp)^\perp = W$.

题 2. 求 $\mathbb{R}^4$(配标准内积) 中, 下列向量组生成的子空间的正交补的一组基.

1. $\{(1,0,2,1),(2,1,2,3),(0,1,-2,1)\}$;
2. $\{(1,1,1,1),(-1,1,-1,1),(2,0,2,0)\}$.

题 3. 记 $R_n = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ 为全体次数不超过 n 的多项式构成的线性空间, 其上配有内积

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

- 称形如 $P_0(x) = 1, P_k(x) = \dfrac{1}{2^k k!}\dfrac{d^k}{dx^k}[(x^2-1)^k], k = 1,2,\cdots,n$ 的多项式为 *Legendre* 多项式. 证明 $P_0, P_1, \cdots, P_n$ 构成 R_n 的一组正交基.
- 设 f 是次数为 n 的首一多项式, 求 f 长度 (即 $\sqrt{(f,f)}$) 的最小值.
- 求 x^n 到 R_{n-1} 的距离 $(n > 0)$.

题 4. 设 V 是有限维 $\mathbb{R}$-向量空间, $f\colon V\times V \to \mathbb{R}$ 双线性型, 满足对 $x, y \in V$, $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow f(y,x) = 0$. 证明, f 要么是对称的, 要么是反对称的.

注: 称 f 是反对称的, 如果对任何 $x, y \in V, f(x,y) = -f(y,x)$.

题 5. 对顶点为 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 的图 Γ, 考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的对称双线性型

$$q_\Gamma(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

其中当 $i = j$ 时 $a_{ij} = 2$, 当 $i \neq j$ 且 v_i, v_j 相邻 *(有一条边连接)* 时, $a_{ij} = -1$, 其余情况 $a_{ij} = 0$. 证明, 对下面这些图 Γ, q_Γ 是正定的*:*

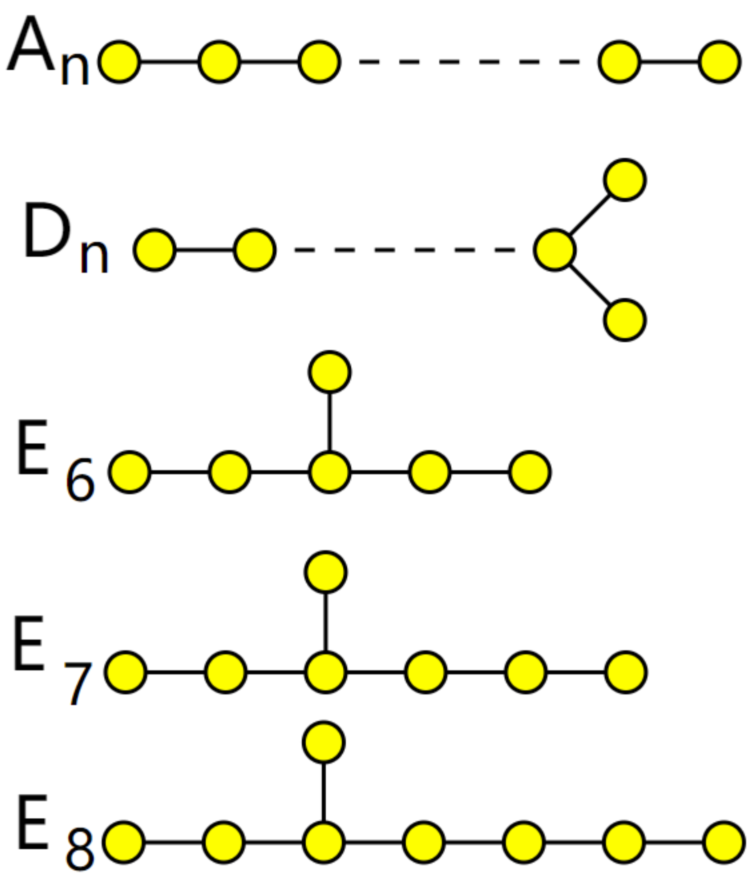

图 1: Simply Laced Dynkin Diagrams

题 6. 设 $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是一个有限维实内积空间. 假设 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 是其一组基, 满足 $\langle v_i, v_j \rangle \leq 0$, 对任何 i, j *(几何上看, 这说两两夹角都是直角或钝角)*.

- 证明，存在唯一的向量 v_i^* 使得 $\langle v_i^*, v_j\rangle = \delta_{ij}$，其中 δ_{ij} 为 *Kronecker* 符号，当 $i=j$ 时为 1，其余情况为 0.

- 证明 $\langle v_i^*, v_j^*\rangle \geq 0$，对任何 i,j *(几何上看，这说两两夹角是直角或锐角)*.

题 7. *(Hadamard 不等式)* 对 $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\in M_n(\mathbb{R})$，证明

$$(\det A)^2 \leq \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right).$$

等号成立的条件是什么？

题 8. 设 $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个有限维实内积空间.

- 对任何 $0\neq\alpha\in E$，定义 E 上的一个线性变换

  $$s_\alpha : \beta \mapsto \beta - 2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha.$$

  证明，s_α 保持内积，即 $s_\alpha\in O(E)$.

  几何上看，s_α 是关于垂直于 α 的超平面的反射.

- 求 s_α 在实数域上的相似标准型 *(原本 s_α 是一个线性变换，但固定一组基后其成为一个矩阵. 而相似标准型和基的选取无关)*.

- 如果你正确计算了上述相似标准型，可以看出对任何 $0\neq\alpha,\beta$，都有 s_α 和 s_β 相似. 直接证明之，即找到 E 的线性同构 w，使得 $ws_\alpha w^{-1}=s_\beta$.

下面我们引入根系的概念. 根系是研究复半单 *Lie* 代数的强大工具，但它的性质基本都是初等的几何问题.

设 R 是 $E-\{0\}$ 的一个有限子集. 称 (E,R) 是一个根系，如果

1. R 生成了 E.
2. 对任何 $\alpha,\beta\in R$，数 $2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\in\mathbb{Z}$.
3. 对任何 $\alpha,\beta\in R, s_\alpha(\beta)\in R$.

进一步称 R 是一个约化根系，如果对任何 $\alpha,\beta\in R$ 且 α,β 线性相关，有 $\beta=\pm\alpha$.

- 设 $(E,R),(F,S)$ 都是约化根系，证明 $(E\oplus F, R\cup S)$ 也是约化根系. 这里把 R 理解为 $R\oplus 0, S$ 理解为 $0\oplus S$.

约化根系 (E,R) 称为可约的，如果存在非平凡的子空间 E_1,E_2 使得 $E_1\oplus E_2 = R$ 且 $R=(R\cap E_1)\cup(R\cap E_2)$. 若 (E,R) 不是可约的，则称其为不可约的.

- *(A_n 类根系)* 考虑 $E=\{(x_0,x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}: x_0+x_1+\cdots+x_n=0\}$. 这里给予 $\mathbb{R}^{n+1}$ 标准内积，E 作为子空间当然也继承了这个内积. 考虑 $R=\{e_i-e_j : i\neq j\}$，其中 $e_i\in\mathbb{R}^{n+1}, 0\le i\le n$ 表示只有第 $i+1$ 个坐标为 1，其他均为 0 的那个向量. 证明 (E,R) 构成一个不可约的约化根系.

- 在同构意义下，求 $\mathbb{R}^2$ 里的所有约化根系 *(提示：共 4 个)*. 其中有哪些是不可约的？

  注： $\Phi\colon (E,R)\to(F,S)$ 称为根系 (E,R) 和 (F,S) 之间的同构，如果 $\Phi\colon E\to F$ 是线性同构，且对任何 $\alpha\in R, \Phi\circ s_\alpha = s_{\Phi(\alpha)}\circ\Phi$.

*注：*三类对象，即 *(几何对象)* 约化根系，*(组合对象) Dynkin* 图和 *(代数对象)* 复半单 *Lie* 代数在同构意义下有着一一对应的关系. 因此分类了所有根系便能分类所有复半单 *Lie* 代数. 上面的例子应该已经让大家看到，根系的分类完全是初等几何学的讨论.

题 9. 设 $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个有限维实内积空间. 定义反对称变换 T 为满足 $\langle T(v),w\rangle = -\langle v, T(w)\rangle$ 的线性变换. 请找出 T 在标准正交基下的矩阵的最简型. (或者反对陈矩阵在正交矩阵的共轭下的分类.)

题 10. 设 $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个 n 维实内积空间. 假设 T 是一个对称变换，有特征值 $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_n$. 证明对称变换的特征值可以由如下的 *Min-Max* 方法给出.

$$\lambda_k = \min\{\max\{\langle T(x),x\rangle : x\perp W_k, |x|=1\} : W_k\subset E \text{ 子空间}, \dim W_k = k-1\}$$

这里先固定 $k-1$ 维子空间 W_k，取出对应的最大值

$$\max\{\langle T(x),x\rangle : x\perp W_k, |x|=1\}.$$

然后让 W_k 取遍 $k-1$ 维子空间，取出这些值中的最小值。

2 思考题

本部分题选做, 不计成绩.

题 11. $SO(3,\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上的作用可以延拓到三个变元的多项式环 $\mathbb{R}[X_1,X_2,X_3]$ 上, 即 $A.f(\mathbb{X})=f(A^{-1}\mathbb{X}), A\in SO(3,\mathbb{R}), f\in\mathbb{R}[X_1,X_2,X_3]=\mathbb{R}[\mathbb{X}]$. 求所有 $f\in\mathbb{R}[X_1,X_2,X_3]$, 使得对任意 $A\in SO(3,\mathbb{R}), A.f=f$.

提示: $|\mathbb{X}|^2=X_1^2+X_2^2+X_3^2$ 就是一个满足要求的例子. 一般地, 利用 Nullstellensatz.