清华大学考试试题专用纸

考试课程: 代数-0 R 班 期末考试 A 卷　　姓名: ____________

- 考试时间: 2022 年 06 月 14 日 (星期二) 14:30 – 16:30.
- 本试卷共 2 页, 8 道大题, 总分为 100 分.
- 考生默认遵守考试纪律, 不遵守者后果自负.
- 所有的解答请写出必要的细节, 推理依据和推理过程. 注意引用定理或结论时, 应尽量引用其原始版本而非不常见的变种版本. 若题目要求证明定理或结论本身, 不能直接叙述其名字而不加证明.

1. [15 分] 判断以下矩阵在复数域上是否可以对角化, 如果可以, 求出可逆复方阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 是对角阵; 如果不能, 请说明理由.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. [10 分] 定义 P_n 为关于未定元 x 次数小于或等于 n 的复系数多项式组成的复线性空间. 定义 P_n 上的线性变换 $T\colon P_n \to P_n$ 为 $T(f) = f' + f$. 求这个线性变换的特征值和对应的特征向量.

3. [10 分] 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 的奇异值分解.

4. [15 分] 假设 V 是关于 x 的次数小于或等于 3 次的实系数多项式组成的实线性空间. 定义 V 上的对称双线性型为 $B(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)x\,dx$. 求 B 的符号.

5. [15 分] 取 α 和 β 为 n 维复列向量. 请问 n 阶方阵 $\alpha \cdot \beta^T$ 是否一定可以对角化? 如果一定可对角化, 请证明. 如果不一定, 请举出例子, 并说明在什么时候可以对角化.

6. [15 分] 假设 A 是一个 n 阶实方阵, 有实特征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ 和奇异值 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$. 证明 $\sigma_1 \geq \lambda_1$.

7. [10 分] 求 n 阶实正交矩阵的行列式的所有可能取值. 并对每一个可能值举出一个对应的 n 阶正交矩阵.

8. [10 分] 已知一次实验测得关于不同自变量 x 的函数值 y 为 $(x_1, y_1) = (1, 1), (x_2, y_2) = (0, 1), (x_3, y_3) = (-1, 2), (x_4, y_4) = (2, 4), (x_5, y_5) = (3, 5)$. 求实系数一次函数 $y(x) = a + bx$ 使得 $\sum_i |y(x_i) - y_i|^2$ 最小。