代数 0-R 班期中考试题目

每题 15 分，要求有清晰的过程。答题纸上注明姓名学号。

题 1. 令 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

1. 证明和 B 交换的矩阵 A 的集合 $W = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | AB = BA\}$ 是实线性空间 $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ 的子空间.
2. 找到 W 的一组基.

题 2. 找到一个 3×3 的实矩阵 A，使得 $\ker A = Span_{\mathbb{R}}\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$

题 3. 计算以下关于 x 的函数的导数

$$f(x) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & 35 & 3 & 5 \\ 4 & x & 6 & 21 \\ -1 & 32 & 4 & 5 \end{bmatrix}\right).$$

题 4. 令 G 是二阶可逆实矩阵的集合，B 是 G 中上三角矩阵组成的子集，$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in G$. 定义 G 的子集 $B\omega B$ 为 $B\omega B = \{g\omega h \mid g, h \in B\}$. 证明 G 是 B 和 $B\omega B$ 的无交并.

题 5. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ 是 n 阶方阵. 设 A 可逆, $B = (b_{ij})_{n\times n}$ 是一个严格上三角矩阵, 即当 $i \geq j$ 时, $b_{ij} = 0$. 定义 $M_n(\mathbb{R})$ 上的线性变换 φ 如下

$$\varphi(X) = AX - XB$$

证明对任意 $C \in M_n(\mathbb{R})$, 存在唯一的 X 使得 $\varphi(X) = C$.

题 6. 设 A, B 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 $m \times n$ 矩阵, $\mathrm{rank}(A) = r, \mathrm{rank}(B) = s$, 并且 $\mathrm{rank}(A+B) = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$. 证明: 存在 m 阶可逆矩阵 P 与 n 阶可逆矩阵 Q 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad PBQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

题 7. $M_n(\mathbb{R})$ 是实数域上的 n 阶方阵的集合. $\Phi: M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 是一个映射, 满足以下条件

(a) $\Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B), \forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$;

(b) 对任意上三角矩阵 $A \in M_n(\mathbb{R}), \Phi(A)$ 等于 A 的主对角线元素之积;

(c) 对任意下三角矩阵 $A \in M_n(\mathbb{R}), \Phi(A)$ 等于 A 的主对角线元素之积.

1. 证明: $\Phi(A) = |A|, \forall A \in M_n(\mathbb{R})$.
2. 如果 Φ 只满足条件 (a) 和 (b), 结论是否成立? 请证明.

题 8. 考虑 $T = \{XY - YX : X, Y \in M_n(\mathbb{C})\}, S$ 为 T 在 $M_n(\mathbb{C})$ 中生成的子空间. 证明

$$S = \{X \in M_n(\mathbb{C}) : \mathrm{Tr}(X) = 0\}.$$

以下为选做题，可在考试后一天内网络学堂继续提交，考试后提交的可得一半分数

题 9. 设 A, B, C, D 是 3×3 的复对称矩阵, 即 $A = A^T, B = B^T, C = C^T, D = D^T$. 证明存在不全为零的复数 a, b, c, d 使得

$$\mathrm{rank}(aA + bB + cC + dD) \leq 1.$$

题 10. *(难)* 设 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n} \in M_n(\mathbb{C})$, 证明

$$\sum_{\sigma \in S_{2n}} \mathrm{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2n)} = 0.$$

其中 S_{2n} 表示 $2n$ 个元素的置换群。$\mathrm{sgn}(\sigma)$ 表示置换 σ 的符号, 即 $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{l(\sigma)}$, 其中 $l(\sigma)$ 是 σ 中逆序对的个数, 即集合 $\{(l, k) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq l < k \leq 2n, \sigma(l) > \sigma(k)\}$ 中元素的个数.