代数 1 H 班 作业 1

2022 年 9 月 16 日

题 1. 计算下列 S_6 中的元素的乘积。其中 $\sigma = \begin{pmatrix} 1,2,3,4,5,6 \\ 1,3,4,6,5,2 \end{pmatrix}$ 和 $\tau = \begin{pmatrix} 1,2,3,4,5,6 \\ 6,5,4,3,2,1 \end{pmatrix}$

1. $\sigma \cdot \tau$.

2. $\sigma \cdot \tau \cdot \sigma^{-1}$.

题 2. 列出 S_4 的所有子群，并指出哪些是正规子群。

题 3. 对一个群 G 中的任意元素 g, h，证明 $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$.

题 4. 试分类 $(\mathbb{Z}, +)$ 的所有子群。

题 5. 试构造同构 $f \colon \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

题 6. *Find $|D_n|$. Is dihedral group D_n abelian? Prove your claim.* 可以只考虑 $n \geq 3$, $n = 1, 2$ 的定义上课没有讲.

题 7. 取素数 p, 考虑群 $G = GL(n, \mathbb{F}_p)$. 考虑 G 的子集

1. B 是 G 中上三角矩阵的全体.

2. W 是每行每列有且仅有一个 1，其余位置是 0 的方阵全体. (请说明为什么 W 是 G 的子集)

3. H 是每行每列有且仅有一个位置非零, 其余位置是 0 的方阵全体. (请说明为什么 H 是 G 的子集)

4. T 是 G 中的对角阵全体.

5. U 是 G 中对角线都是 1 的上三角矩阵全体.

6. D 是 G 中纯量矩阵全体，也就是形如 $\lambda I, \lambda \neq 0$ 的矩阵全体.

7. SL 是 G 中行列式等于 1 的矩阵全体.

请完成以下证明或者计算

1. 证明以上子集都是 G 的子群.

2. 判断这些子群和 G 本身是不是阿贝尔群.

3. 求这些子群和 G 的阶数.

4. 判断哪些子群是 G 的正规子群.

5. 对于有严格包含关系的子群，判断小的群是否是大的群的正规子群.

题 8. 对于上题中取 $p = 2, n = 2$. 判断 $GL(2, \mathbb{F}_2)$ 是否和 S_3 同构. 如果是，请写下一个同构映射.

题 9. *Let H be subgroup of group G.*

1. *Try to write down the definition of right H-cosets. Prove the number of left H-cosets is equal to the number of right H-cosets.*

2. *Prove the claim in class that H is normal if and only if $gH = Hg$ for all $g \in G$.*

3. *We define the number of left H-cosets as the index of H in G and denote by $[G : H]$, i.e. $[G : H] = |G/H|$. Prove that if $[G : H] = 2$, then H is normal.*

Preliminary: a set S with binary operation $m : S \times S \to S$ is a semi-group if m is associative.

题 10. *Let G be a set of $n \times n$ matrix whose rank are less than or equal r. Prove that G is a semi-group with multiplication of matrix.*

题 11. *Suppose G is a semi-group. Assume*
(1) G has left unit e, namely for any $a \in G$, $ea = a$.
(2) every element a of G has left inverse a^{-1} such that $a^{-1}a = e$.
Show that G is a group.

题 12. *Let* $G = \{(a,b) | a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$*. Define a binary operation of* G *as* $(a,b) \cdot (c,d) = (ac, ad+b)$*. Prove that* G *is a group with this operation.*

题 13. *Let* G *be a finite group of even order (namely the number of elements of* G *is even). Prove that the number of solutions of equation* $x^2 = e$ *in* G *is also even.*

题 14. *Let* G *be a group, and* $a, b \in G$*. Suppose* $a^5 = e$ *and* $a^3 b = b a^3$*. Prove that* $ab = ba$*.*

题 15. *Prove that the real number with additive group law is isomorphic to the positive real number with multiplicative group law.*

题 16. *Let* G *be a finite group,* $H \subset G$ *a proper subgroup*（真子群，作为真子集的子群）*. Show that the union of the conjugates of* H *in* G *is not all of* G*, that is,*

$$G \neq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}.$$

注意，对于无穷群，上述等式可能成立，你能找到例子吗？