代数 1 H 班 作业 3

2022 年 9 月 30 日

注记, 如果我们在讨论半直积的定义时采用 $G = HK$, H 正规, $K \cap H = \{e\}$, 有 K 在 H 上共轭作用诱导 $K \to Aut(H)$, 则 G 同构于上次作业 13 题中定义的半直积的方式, 通常教科书中会采用这种方式, 我们上课时的记号和这个是相反的。

题 1. 设 p 为素数, 求 $GL(\mathbb{F}_p)$ 中 *Sylow-p* 子群的个数.

题 2. 如果 S_n 中元素 σ 的写成不相交的轮换的乘积 $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_l$, 其中长度为 m 的轮换个数为 λ_m. (这里 1-轮换 (i) 表示保持该元素 i 不变)。我们将 σ 的 *type* 记作 $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n}$, 并满足 $\sum_i i\lambda_i = n$. 请证明 S_n 中两个元素共轭当且仅当两者有相同的 *type*.

题 3. *In S_n, compute the number of the permutations of type $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n}$, and prove the following formula*

$$\sum_{\lambda} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} i^{\lambda_i} \lambda_i!} = 1.$$

Here λ is the index $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ such that $\sum_i i\lambda_i = n$.
(Hint: 用作业 2)

题 4. *Let $n \geq 2$, prove that (12) and $(123 \cdots n)$ generate the group S_n.*

题 5. *Let $n \geq 3$. Prove that (123), (124), $\cdots$, $(12n)$ generate the group A_n.*

题 6. 证明 D_n 同构于由两个生成元 x, y 生成, 且满足如下关系的群。

$$x^n = y^2 = (xy)^2 = e$$

题 7. 假设 p 和 q 是两个素数, 请分类 pq 阶的群。

题 8. 请分类 12 阶群。

题 9. *The conjugation induces an group homomorphism from G to $Aut(G)$. We call the image of this morphism $Inn(G)$ as inner automorphism group. Prove that the group of inner automorphisms of a group G is normal in $Aut(G)$. We call the quotient group $Aut(G)/Inn(G)$ as outer automorphism group $Out(G)$. 注意：有同学认为半直积的结构由到 H 到 $Out(G)$ 的 morphism 确定，这个一般是不对的，参见 https://math.stackexchange.com/questions/1710620/do-homomorphisms-h-to-operatornameautk-that-coincide-at-the-level-of-o?rq=1。*

题 10. 证明如果群 G 有有限指数的子群，则 G 有有限指数的正规子群。

题 11. 证明如果群 G 有两个有限指数的子群 H 和 K，则 $H \cap K$ 也是 G 的有限指数子群.

题 12. 循环群

1. *Let p be a prime number, $G = \{x \in \mathbb{C} \mid \exists\ n \text{ such that } x^{p^n} = 1\}$. Then G is a group with usual multiplication, and every proper subgroup of G are cyclic of finite order.*

2. *Prove that $(\mathbb{Q}, +)$ is not a cyclic group, but any finitely generated subgroup are cyclic.*

3. *Let G be a nonabelian group. Prove that the group $Aut(G)$ is not cyclic. In particular, if $|Aut(G)|$ is a prime number, then G is abelian. (Hint: Consider the inner automorphism $Inn(G) \leq Aut(G)$, prove that $Inn(G) \cong G/Z(G)$)*

题 13. *(Burnside lemma) Suppose a finite group G acts on a finite set S. Let $F(g) = |\{\ x \in S \mid gx = x\}|$, namely the number of fixed point by g. Write t as the number of different orbits of action G on S. Prove the following formula*

$$t = \frac{\sum_{g \in G} F(g)}{|G|}$$

题 14. *Let p be a prime number, G is a p-group. Prove that the number of non-normal subgroups of G must be multiple of p.*

题 15. *Let $G = GL_n(\mathbb{C})$. Prove that G has no proper subgroups of finite index.*

题 16. *Let G be a group, and A a normal abelian subgroup. Show that G/A operates on A by conjugation , and in this manner get a homomorphism of G/A into $Aut(A)$.*

题 17 (思考题，不用交)**.** 下面我们确定在正规子群和商群确定时如何分类群的结构。我们引入一些概念。

定义 1. 假设有群 G_1,G_2, G_3 的同态 $f\colon G_1 \to G_2$, $g\colon G_2 \to G_3$。我们称如下序列

$$G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3$$

在 G_2 处正合，如果 $Im(f) = \ker(g)$。一个元素的群记作 1. 则称序列

$$1 \to G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3 \to 1$$

为短正合列, 如果序列在 G_1,G_2, G_3 处均正合, 即 f 是单同态, g 是满同态, 且 $Im(f) = \ker(g)$. 这个序列此时也称作 G_3 关于 G_1 的一个 *extension.* 另一个 *extension*

$$1 \to G_1 \xrightarrow{f'} G_2' \xrightarrow{g'} G_3 \to 1$$

和已知的这个同构是指存在 $G_2 \to G_2'$ 的群同构 F，使得有如下的图表中的每一个矩形都交换

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & G_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id"] & G_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "F"] & G_3 \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 1 \\
1 \arrow[r] & G_1 \arrow[r, "f'"] & G_2' \arrow[r, "g'"] & G_3 \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

即 $f' = F \circ f$ 和 $g = g' \circ F$.

定义 2. 短正合列

$$1 \to G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3 \to 1$$

分裂是指存在同态 $i\colon G_3 \to G_2$ 使得 $g \circ i = Id_{G_3}$。

以下我们假设 G_1 是交换群, 其中的群运算记作 $+$, 单位元记作 0。则由以上习题知，短正合列

$$1 \to G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3 \to 1$$

会诱导一个 G_3 在 G_1 上的共轭作用，或者等价于有群同态 $\phi\colon G_3 \to Aut(G_1)$. 我们现在分类这个同态 ϕ 给定的情况下的所有 *extension*.

1. 证明当短正合列分裂时，G_2 同构于 G_1 和 G_3 的半直积.
2. 取映射 $s\colon G_3 \to G_2$, 使得 $g \circ s = Id_{G_3}$. 证明这样的 s 可以取到，且若映射 $s'\colon G_3 \to G_2$, 满足 $g \circ s' = Id_{G_3}$, 则存在映射 $y\colon G_3 \to G_1$，使得 $s'(b) = y(b)s(b)$. 我们称这样的 s 为截面.
3. 定义映射 $\alpha\colon G_1 \times G_3 \to G_2$ 为 $\alpha(a,b) = a \cdot s(b)$. 证明这是一个双射.
4. 利用这一双射和 G_2 的群结构在集合 $G_1 \times G_3$ 上诱导一个群结构, 使得 α 是一个群同构. 证明在这个群结构下存在映射 $c\colon G_3 \times G_3 \to G_1$ 使得 $(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2) = (a_1 + (\phi(b_1))(a_2) + c(b_1,b_2), b_1b_2)$, 且 c 满足

   $$(\phi(b_1))(c(b_2,b_3)) - c(b_1b_2,b_3) + c(b_1,b_2b_3) - c(b_1,b_2) = 0$$

   对任意 $b_1,b_2,b_3 \in G_3$ 成立.
5. 假设给定 c 满足如上条件，利用上述公式 $(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2) = (a_1 + (\phi(b_1))(a_2) + c(b_1,b_2), b_1b_2)$ 在 $G_1 \times G_3$ 上定义运算，证明这是一个群结构，且做成 G_3 在 G_1 上的 *extension*.
6. 映射 $\{x\colon G_3 \times G_3 \to G_1\}$ 组成的集合有自然的交换群结构, 加法定义为 $(x_1+x_2)(b_1,b_2) = x_1(b_1,b_2) + x_2(b_1,b_2)$. 证明满足以上条件的 c 构成一个子群, 记作 $Z^2(G_3,G_1)$.
7. 不同的截面 s 的选取会对应 $Z^2(G_3,G_1)$ 的一个子群 $B^2(G_3,G_1)$. 具体来说，请证明 s 换成 s' 时，对应的 c' 满足 $c'(b_1,b_2) = c(b_1,b_2) + \phi(b_1)(y(b_2)) - y(b_1b_2) + y(b_1)$. 证明形如 $x(b_1\ b_2) = \phi(b_1)(y(b_2)) - y(b_1b_2) + y(b_1)$ 的映射构成 $Z^2(G_3,G_1)$ 的一个子群, 记作 $B^2(G_3,G_1)$.
8. 证明 $Z^2(G_3,G_1)/B^2(G_3,G_1)$ 分类了所有固定 ϕ 的，G_3 关于 G_1 的 *extension* 的同构类. 这个交换群记作 $H^2(G_3,G_1)$.
9. 证明如果 ϕ 平凡，则 G_1 在 G_2 的中心里.
10. 假设 $G_1 = \mathbb{Z}$, $G_3 = C_p$ 是素数 p 阶循环群, ϕ 平凡. 证明 $H^2(C_p,\mathbb{Z}) \cong C_p$ 并找到对应的 *extension*.