代数 1 H 班 作业 4

2022 年 10 月 8 日

题 1. *Artin Chapter 7, 11.4*

题 2. *Artin Chapter 7, 11.5*

题 3. *Artin Chapter 7, 11.6* 任选一个小问做即可.

题 4. 证明 A_n, $n \geq 5$ 是单群.

题 5. *Prove that the map* $f\colon S_n \to \{\pm 1\}$ *defined by* $f(\sigma) = (-1)^{l(\sigma)}$ *is a group homomorphism. Identify this group homomorphism with the composition of injective homomorphism* $S_n \to GL(n, F)$ *and determinant* det.

题 6. 1. 请将长度最长的 $\omega \in S_n$ 写做基础对换的乘积.

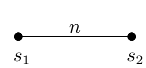
2. 证明 $l(\sigma) = l(\sigma^{-1})$

3. 证明 $l(\sigma) + l(\sigma\omega) = \binom{n}{2}$

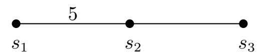
以下题目中 Coxeter diagram 定义的群是指由结点 s_i 生成的群，满足如下关系

1. $s_i^2 = e$
2. $(s_i s_j)^2 = e$，如果 s_i, s_j 之间没有连线
3. $(s_i s_j)^3 = e$，如果 s_i, s_j 之间有连线，且线上没有数字
4. $(s_i s_j)^m = e$, 如果 s_i, s_j 之间有连线，且线上有数字 m。

题 7. 考虑二面体群 D_n, 证明这个群和以下 $I_2(n)$-*diagram* 定义的 *Coxeter* 群同构。即群 $D_n \cong \langle s_1, s_2 \mid s_1^2, s_2^2, (s_1 s_2)^n \rangle$.



题 8. 考虑正十二面体的对称群。证明这个群和以下 H_3 *diagram* 定义出的 *Coxeter* 群同构。



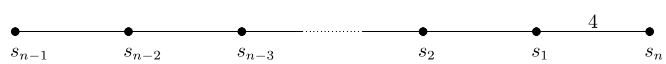
试找出对应的三个反射的法向量。

题 9 (Hyperoctahedral group)**.** *(对 $n=3$ 是必做题，对一般 n 是选做题，可以不用写) The hypercube in $\mathbb{R}^n$ is defined as convex hull of 2^n points $(\pm1,\cdots,\pm1)$ in $\mathbb{R}^n$. Let $W(B_n)$ be the group of orthogonal transformations preserving this convex set, in other words, the symmetry group of the hypercube.*

1. *What is the order of $W(B_n)$?*
2. *Identify $W(B_n)$ with the following subgroup of S_{2n}. Let $-[n]=\{-1,-2,-3,\cdots,-n\}$. The subgroup consists of permutations of $-[n]\sqcup[n]$ such that $\sigma(-k)=-\sigma(k)$.*
3. *Prove that $W(B_n)$ is generated by n-elements of order two $s_n=(1,-1)$ and $s_i=(i,i+1)(-i,-i-1)$ for $1\le i\le n-1$, and the minimal number of generators needed in the expression of $\sigma\in W(B_n)$ (similar as the number of inversions for permutation groups) is given by*

$$\#\{(i,j)\in[n]\times[n]|i<j,\sigma(i)>\sigma(j)\}+\#\{(i,j)\in[n]\times[n]|i\le j,\sigma(-i)>\sigma(j)\} \tag{1}$$

4. *Prove that the generators in s_i satisfy the Coxeter relations for type B_n diagram.*



5. *Prove that the group given by generators $s_1,\cdots,s_n$ and relations in the type B_n diagram is isomorphic to $W(B_n)$.*

题 10 (Free product and Ping-Pong lemma)**.**

定义 1 (自由积)**.** 如果两个群 G 和 H 分别写成生成元和关系

$$G=\langle X\mid R\rangle,\quad H=\langle Y\mid S\rangle,$$

则 G 和 H 的自由积定义为 $G\star H=\langle X\sqcup Y \mid R\sqcup S\rangle$. 或者也可定义为 G 和 H 中元素组成的 *words*, 在定义 *words* 的乘法时类似于自由群的定义一样，额外加入 G 和 H 中的乘法来消去相邻两个来自同一个群的元素.

1. 证明 *Ping-Pong lemma.* 设 G 有两个阶数不全为 2 的子群 H_1 和 H_2，且 H_1 和 H_2 生成群 G. 假设 G 在集合 A 上有作用，且存在 A 的两个不相交的非空子集 A_1 和 A_2，使得 $\forall h_1\in H_1\backslash\{e\}$, $h_1(A_2)\subset A_1$, $\forall h_2\in H_2\backslash\{e\}$, $h_2(A_1)\subset A_2$. 则 G 同构于 $H_1\star H_2$.

2. 证明由矩阵 $M_1=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$ 和 $M_2=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$ 在 $SL(2,\mathbb{R})$ 中生成的子群同构于两个生成元的自由群. (提示：考虑 $\mathbb{R}^2$ 中子集 $\{(x,y)\mid |x|<|y|\}$ 以及 $\{(x,y)\mid |y|<|x|\}$)

3. 记 $SL(2,\mathbb{Z})$ 为行列式为 1 的 2 阶整数矩阵在矩阵乘法下组成的群，定义 $PSL(2,\mathbb{Z})$ 为商群 $SL(2,\mathbb{Z})/\pm I$. 考虑元素 $M_3=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}$ 和 $M_4=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ 来证明 $PSL(2,\mathbb{Z})$ 同构于 $C_3\star C_2$. *(提示：考虑 $PSL(2,\mathbb{Z})$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中所有过原点的直线的集合上的作用，分成斜率小于或等于零的部分以及其他。)*

题 11 (Affine Coxeter group, 选做题，可以不交)**.** 定义 $\tilde{S}_n$ 如下. 考虑 $V=\{(x_1\cdots x_n)\in\mathbb{R}^n\mid \sum_i x_i=0\}$. 则 $V_{\mathbb{Z}}=V\cap\mathbb{Z}^n$ 在向量的加法下组成一个群. 对于 $\sigma\in S_n$ 和 $v=(v_1,\cdots,v_n)\in V_{\mathbb{Z}}$. 考虑 V 上由变换 $T(x_1,\cdots,x_n)=(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(n)})+v$. 由这些变换在复合下组成的群记做 G.

1. 证明形如 $T(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n)+v$ 的元素构成了 $\tilde{S}_n$ 的一个同构于 $V_{\mathbb{Z}}$ 的正规子群. 形如 $T(x_1,\cdots,x_n)=(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(n)})$ 的元素构成了 $\tilde{S}_n$ 的一个同构于 S_n 的子群. 证明 $\tilde{S}_n$ 同构于 $V_{\mathbb{Z}}$ 和 S_n 的半直积.

2. 利用以上同构，将 S_n 的生成元 $s_1,\cdots,s_{n-1}$ 作为 $\tilde{S}_n$ 中的元素，令 s_n 为如下变换 $s_n(x_1,\cdots,x_n)=(x_n+1,x_2\cdots,x_1-1)$. 证明 $s_1,\cdots,s_n$ 都是相对于某一仿射超平面的反射（不一定过原点)，且是 $\tilde{S}_n$ 的生成元. 利用法向量夹角找到这些反射之间的关系并画出对应的 *Coxeter diagram.* 记对应的 *Coxeter* 群为 G.

3. 证明对题目中给出的元素 T 写作以上生成元的最小个数为

$$l(T) = \sum_{\sigma(i)<\sigma(j)} |v_i - v_j| + \sum_{\sigma(i)>\sigma(j)} |v_i - v_j - 1|.$$

4. 考虑 $n=3$ 和 $\tilde{S}_3$ 在 V 上的作用. 证明 V 中有非平凡的稳定化子的点组成的集合是 V 上一些直线的并, 且这些直线的补集是不相交的等边三角形. 如果有两个三角形落在一条直线的两边, 则称这条直线将两个三角形分离. 取其中一个三角形 Δ, 证明 $l(T)$ 等于 Δ 与 $T(\Delta)$ 之间分离的直线的数目.

5. 对比 $\tilde{S}_3$ 在这些三角形所在的集合上的作用, 以及 *Coxeter-Todd algorithm* 得到的 G 在 G 上的左乘作用, 证明 G 与 $\tilde{S}_3$ 同构.