清华大学考试试题专用纸

考试课程: 代数 1H 期中考试 A 卷

姓名: ____________ 班级: ____________ 学号: ____________

- 考试时间: 2022 年 11 月 6 日 (星期天) 8:00am – 12:00noon.
- 本试卷共 2 页, 15 道大题, 总分为 150 分.
- 考生默认遵守考试纪律, 不遵守者后果自负.
- 所有的解答请写出必要的细节, 推理依据和推理过程. 注意引用定理或结论时, 应尽量引用其原始版本而非不常见的变种版本. 若题目要求证明定理或结论本身, 不能直接叙述其名字而不加证明.

以下题目中 $\mathbf{R}$ 指实数域, $\mathbf{C}$ 指复数域, $\mathbf{Z}$ 指整数全体.

题 1. 陈述群 G 的子群的定义，G 的正规子群的定义，并举例说明子群不一定是正规子群（不用写证明）。请包含以下两个例子，

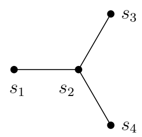
1. G 有限群,
2. G 无限群，且子群指数有限。

题 2. 请证明 p-群的任意真子群 H 的正规化子（*normalizer*）非平凡 (元素个数多于 $|H|$)。

题 3. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. 判断 A, B 在群 G 中是否共轭，并说明理由。

1. $G = SL(2, \mathbf{R})$,
2. $G = SL(2, \mathbf{F}_p)$. 其中 p 是一个素数.

题 4. 求如下图表示的 *Coxeter* 群的阶数，并证明你的结论。



即求由生成元 s_1, s_2, s_3, s_4 生成，且满足如下关系的群的阶数。

1. $s_i^2 = e$, 对 $i = 1, 2, 3, 4$;
2. $(s_i s_j)^3 = e$, 如果 s_i, s_j 之间有连线;

3. $(s_is_j)^2=e$, 如果 s_i, s_j 之间没有连线。

题 5. 请分类 18 阶群的结构，请写出为什么 18 阶群都同构于你给出某一个构造，以及互相之间为什么不同构。

题 6. 证明 72 阶群不是单群。

题 7. 定义 $\Gamma(2)$ 是 $SL(2,\mathbf{Z})$ 中的满足如下矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 组成的子集。

$$a,b,c,d\in\mathbf{Z}, ad-bc=1.\text{且}a\equiv 1, b\equiv 0, c\equiv 0, d\equiv 1 \mod 2.$$

请证明：

1. $\Gamma(2)$ 是 $SL(2,\mathbf{Z})$ 的正规子群。

2. $\Gamma(2)$ 由 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 生成。

题 8. 证明 $PSL(2,\mathbf{F}_5)$ 同构于 A_5. *(可以不加证明的使用作业中已经证明的 A_5 是单群.)*

题 9. 1. 请陈述含幺交换环的理想的定义。请举例说明含幺交换环的加法子群不一定是理想。(不用写证明)

2. 请陈述一个含幺交换环极大理想的定义。请举例说明一个素理想不一定是极大理想。(不用写证明)

题 10. 1. 假设整环 R 上有以函数 $s\colon R\backslash\{0\}\to\mathbf{Z}_{\geq 0}$ 为 *size function* 的欧几里得整环结构. 对 $a\in R\backslash\{0\}$ 定义 $\tilde{s}(a)=\min_{b\neq 0, b\in R}\{s(ab)\}$. 证明 $\tilde{s}$ 也是给出 R 上的一个欧几里得整环结构的 *size function*。

2. 证明 $\tilde{s}$ 满足以下条件，当非零元素 $a\mid b$ 时，有 $\tilde{s}(a)\leq\tilde{s}(b)$.

题 11. 请将以下的环写作 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})[x]$ 或者这些环的乘积环 (*product ring*) 的形式，并写下你的推理过程.

1. $(\mathbf{Z}/6\mathbf{Z})[x]/(3x-1)$. *(注意：课上提到的这个环同构于零是不对的。)*

2. $\mathbf{Z}[i]/(5)$.

题 12. 证明 $R=\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ 是一个在函数 $s(a+b\sqrt{2})=|a^2-2b^2|$ 定义下的欧几里得整环.

题 13. 证明 $\mathbf{C}[x,y]/(x^3+y^3-1)$ 中的非零素理想都是极大理想.

题 14. 定义 $R=\mathbf{Z}[a,b,c,d]/(ad-bc)$，请证明

1. R 是整环。

2. R 不是唯一分解整环。

题 15. 证明 $\mathbf{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ 是主理想整环. *(提示：可以不加证明的使用作业中的结论 $\mathbf{C}[t,\frac{1}{t}]$ 是主理想整环。)*