清华大学考试试题专用纸

考试课程: 代数 2H

姓名: ____________

学号: ____________

- 考试时间: 2023 年 6 月
- 本试卷共 3 页, 8 道大题, 总分为 100 分.
- 考生默认遵守考试纪律, 不遵守者后果自负.
- 所有的解答请写出必要的细节, 推理依据和推理过程. 如果用到作业中证明的结论，请提供该结论的证明而不是直接引用。

以下题目中 $\mathbf{Q}$ 是有理数域，$\mathbf{R}$ 指实数域, $\mathbf{C}$ 指复数域, $\mathbf{Z}$ 指整数全体。对素数 p, 记 $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 为 p 个元素组成的域. 在题目中 R 均指交换环.

题 1 (15 分)**.** *假设 K 是 x^3+2x^2+7x+1 在域 F 上的分裂域, 对以下 F 分别求 $[K:F]$ 和 $Gal(K/F)$(指明 $Gal(K/F)$ 是 S_3 的哪个子群).*

1. $F=\mathbf{R}$ 是实数域.
2. $F=\mathbf{Q}$ 是有理数域.
3. $F=\mathbf{F}_2$ 是二元域.

Assume K is the splitting field of x^3+2x^2+7x+1 over field F. Calculate $[K:F]$ and $Gal(K/F)$ for the following F.

1. $F=\mathbf{R}$.
2. $F=\mathbf{Q}$.
3. $F=\mathbf{F}_2$.

题 2 (10 分)**.** *假设 $f\in\mathbf{Q}[x]$ 是一个 $\mathbf{Q}$ 上的不可约多项式, K 是 f 在 $\mathbf{Q}$ 上的分裂域, K 不能由 f 的某一个根生成. 证明 $Gal(K/\mathbf{Q})$ 有非正规的子群.*

Let $f\in\mathbf{Q}[x]$ be an irreducible polynomial and K its splitting field over $\mathbf{Q}$. Assume K cannot be generated by any single root of f. Prove $Gal(K/\mathbf{Q})$ has a non-normal subgroup.

题 3 (15 分)**.** *1. 陈述有限 Galois 扩张的正规基定理.*

2. 令 K/F 是 n 次有限 *Galois* 扩张. 假设 $\operatorname{char} F = 0$ 且 F 包含 n 次本原单位根 ζ_n. 将阶为 m 的元素 $g \in Gal(K/F)$，视为 F-线性空间 K 上的线性变换. 求这个线性变换的所有特征值和对应的特征子空间的维数.

1. *State normal basis theorem for finite Galois extension.*

2. *Let K/F be degree-n Galois extension. Assume* $\operatorname{char} F = 0$ *and F has primitive n-th root of unity ζ_n. View an element $g \in Gal(K/F)$ of order m as F-linear transformation on K. Calculate the eigenvalues and dimensions of the corresponding eigenspaces for this F-linear transformation.*

题 4 (15 分)**.** 1. 陈述 *Noether* 环的定义.

2. *Noether* 环的子环仍然是 *Noether* 的吗？如果是，请证明，如果不是，请举出反例.

3. 假设 R 是一个 *Noether* 环，I 是 R 的理想，证明包含 I 的极小素理想只有有限个. 即考虑 R 中包含 I 的素理想的集合 $X = \{P|P\text{是 } R \text{ 的素理想，且} I \subset P\}$, 该集合 X 在包含关系下做成一个偏序集, $P_1 \le P_2$ 当且仅当 $P_1 \subset P_2$. 证明 X 在该偏序关系下只有有限个极小元.

1. *State definition of Noether ring.*

2. *If a subring of a Noether ring still Noether? If yes, prove it, if no, provide a counter example.*

3. *Let R be a Noether ring , I an ideal of R, prove that there are only finitely many minimal prime ideals of R containing I.*

题 5 (10 分)**.** 假设 M 和 N 是有限生成 R-模, 且 $M \otimes_R N = 0$.

1. 如果 R 是局部环，证明 $M = 0$ 或者 $N = 0$.

2. 如果 $R = k[x]$，其中 k 是一个域. 举例说明 M 和 N 可以同时不为零.

Let M and N be finitely generated R modules and $M \otimes_R N = 0$.

1. *If R is a local ring, prove that $M = 0$ or $N = 0$.*

2. *If $R = k[x]$ with k a field. Show by example that both M and N can be nonzero.*

题 6 (15 分)**.** 1. 请陈述交换环 R 上的平坦模的定义.

2. 假设 R 是主理想整环，M 是 R 上的有限生成平坦模. 证明 M 是 R 上的自由模。

3. 假设 R 是主理想整环，M 是 R 上的平坦模。M 是否一定是自由模，如果是，请证明，如果不是，请对某一个你选的 R 举反例.

1. *State the definition of flat R-modules.*

2. *Assume R is a principle ideal domain, M finitely generated flat R module. Prove that M is a free R-module.*

3. *Assume R is a principle ideal domain, M flat R module. Is M always a free R module? If yes, prove it, if no, provide a counter-example for one ring R you choose.*

题 7 (10 分)**.** 假设域 K 是域 F 的 m 次有限扩张. 考虑自然的嵌入映射 $F[x_1 \cdots x_n] \to K[x_1 \cdots x_n]$ 诱导的素谱上的映射 φ: $\operatorname{Spec} K[x_1 \cdots x_n] \to \operatorname{Spec} F[x_1 \cdots x_n]$. 证明 φ 是满射，且每个点 $P \in \operatorname{Spec} F[x_1 \cdots x_n]$ 的原像 $\varphi^{-1}(P)$ 的点个数小于等于 m. 请举例说明对于某些闭点的原像点的个数会严格小于 m. *(如果使用作业中的结论，请补充该结论的完整证明.)*

Let K be a finite field extension of F of degree m. Consider the natural embedding map $F[x_1 \cdots x_n] \to K[x_1 \cdots x_n]$ and its induced map φ: $\operatorname{Spec} K[x_1 \cdots x_n] \to \operatorname{Spec} F[x_1 \cdots x_n]$. Prove that φ is surjective and the inverse image $\varphi^{-1}(P)$ of any point $P \in \operatorname{Spec} F[x_1 \cdots x_n]$ under φ has no more than m-elements. Provide an example such that inequality can be strict for some closed point. (If you use any conclusion from homework, please provide proof)

题 8 (10 分)**.** 假设环 A 有子环 R, 且 A 在 R 上整. 证明 R 是 *Jacobson* 环当且仅当 A 是 *Jacobson* 环.

Let $R \to A$ be an integral ring extension. Prove that R is Jacobson if only if A is Jacobson.