清华大学考试试题专用纸

考试课程: 代数 2H 期中

姓名: ____________

学号: ____________

- 考试时间: 2023 年 4 月
- 本试卷共 2 页, 10 道大题, 总分为 125 分.
- 考生默认遵守考试纪律, 不遵守者后果自负.
- 所有的解答请写出必要的细节, 推理依据和推理过程. 如果用到作业中证明的结论，请提供该结论的证明而不是直接引用。

以下题目中 $\mathbf{Q}$ 是有理数域，$\mathbf{R}$ 指实数域, $\mathbf{C}$ 指复数域, $\mathbf{Z}$ 指整数全体。对素数 p, 记 $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 为 p 个元素组成的域.

题 1 (10 分)**.** 分别对于 $p = 5, 7$, 请在 $\mathbf{Q}[\sqrt{p}]$ 上因式分解 $x^p - 1$ 并证明你的结论。

题 2 (10 分)**.** 假设 K 是 $x^4 - 2$ 在 $\mathbf{Q}$ 上的分裂域，请问 $K/\mathbf{Q}$ 有多少个中间域，请写下每个中间域的生成元（不一定要写本原元），并证明你的结论。

题 3 (10 分)**.** 对于 $\mathbf{Q}$ 上的四次不可约多项式 $f(x)$，假设任意的根 $\alpha = a + b\sqrt{-1}, a, b \in \mathbf{R}$, 均有 a, b 尺规可作，请求出 f 在 $\mathbf{Q}$ 上的伽罗瓦群的可能情况，并且证明只有这些情形。对于每一种可能情形请举出一个对应的 $f(x)$.

题 4 (20 分)**.** 求如下多项式在 F 上分裂域 K 的伽罗瓦群 $Gal(K/F)$。(指出群的大小、指出与某个已知的有限群同构或者写出生成元和关系。)

1. $f(x) = x^{36} - 1$, $F = \mathbf{F}_7$
2. $f(x) = x^5 - x - 1$, $F = \mathbf{Q}$
3. $f(x) = (x^2 - 6)(x^2 - 8)$, $F = \mathbf{Q}$
4. $f(x) = x^p - x - t$, $F = \mathbf{F}_p(t)$

题 5 (10 分)**.** 假设 $\mathrm{char}(F) = 0$, 且 $x^n - 1$ 在 F 中分裂（即 F 中包含 n 次本原单位根）。证明 $x^n - a \in F[x]$ 的不可约因子均形如 $x^m - b \in F[x]$.

题 6 (10 分)**.** 设 $f(x)=x^5-t_1x^4+t_2x^3-t_3x^2+t_4x-t_5\in F(t_1,\cdots,t_5)[x]$, 其中 $t_1,\cdots,t_5$ 是未定元。假设 $f(x)$ 在分裂域 L 中的根为 $x_1,\cdots,x_5$. 令

$$\alpha=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1,$$
$$\beta=x_1x_3+x_1x_4+x_2x_4+x_2x_5+x_3x_5.$$

证明

1. $D_5=\{1,(12345),(13524),(14253),(15432),(12)(35),(13)(45),$ *(14)(23), (15)(24), (25)(34)* $\}=\langle(12345),(12)(35)\rangle$ 是交错群 A_5 的可解子群;
2. $\alpha-\beta\in L^{D_5}$;
3. 设 F 的特征不为 2 . 求 $[K(\alpha-\beta):K]$, 其中 $K=F(t_1,\cdots,t_5,\sqrt{D(f)}),D(f)$ 是 $f(x)$ 的判别式.

题 7 (15 分)**.** 设域 K 和 L 是域 F 的有限扩张。假设 E 是 K 和 L 的公共扩张，记 KL 是 E 中包含 K 和 L 的最小的子域。

1. 证明 KL 是 F 的有限扩张。
2. 假设 K 是 F 的正规扩张，证明 KL 作为 F 扩张的同构类不依赖于 E 的选取。
3. 假设 K 和 L 是 F 的 *Galois* 扩张, 证明 KL 是 F 的 *Galois* 扩张。
4. 假设 K 和 L 是 F 的 *Galois* 扩张, 且 $Gal(K/F)$ 和 $Gal(L/F)$ 都是阿贝尔群。证明 $Gal(KL/F)$ 也是阿贝尔群。

题 8 (10 分)**.** 假设 K/F 是一个 *Galois* 扩张，且 $Gal(K/F)\cong S_n$. 证明 K 是某一个次数等于 n 的多项式 $f(x)\in F[x]$ 的分裂域。

题 9 (15 分)**.**

1. 令 p 为固定素数，假设 F 是特征等于零的域，且满足任意的有限扩张 K/F, 均有 $p|[K:F]$. 证明任意的非平凡有限扩张 K/F, $[K:F]$ 是 p 的次幂。
2. 将上述条件中的特征等于零改成一般特征，结论是否依然正确？如果正确请证明，如果不正确，请举反例。

题 10 (15 分)**.** 假设 $f(x)\in\mathbf{Q}[x]$ 是一个五次的不可约多项式。如果 $f(x)$ 是根式可解的，证明 $f(x)$ 的判别式 $D>0$。其中 $D=\Pi_{1\le i<j\le 5}(x_i-x_j)^2$, $x_1\cdots x_5$ 是 $f(x)$ 的五个根。*(提示：根据可能出现的 Galois 群进行分类讨论，会有步骤分)*