线性代数 作业 11 答案

2025 年 4 月 10 日

题 1. 计算下列行列式:

1.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & -3 \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z & x & 1 \\ z & x & y & 1 \\ \frac{z+x}{2} & \frac{x+y}{2} & \frac{y+z}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

3.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

4. 因式分解

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

5. *Vandermonde* 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1^{n-1} & X_2^{n-1} & \cdots & X_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

6.

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

其中 $s_k = X_1^k + X_2^k + \cdots X_n^k$.

7. 在复数域 $\mathbb{C}$ 上, 将关于 n 个变量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的多项式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

分解为不可约因子乘积.

8. $\det(A^*)$, 其中 A^* 是方阵 A 的伴随.

9. $(n+1)\times(n+2)$ 的矩阵

$$A = (a_{ij}) = \left(\binom{j-1}{i-1}\right), 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq n+2,$$

A_k 为 A 去掉第 k 列得到的矩阵, 计算 $\det(A_k)$.

解. 1. -21(计算过程略)。

2. 第一行加第三行等于第四行的 2 倍，故行列式为 0.

3. 我们记这个行列式为 A_n, 这是一个依赖于 n 的函数。若 $n \geq 3$, 对第一行展开有 $A_n = 3A_{n-1} - 2A_{n-2}$. 方程 $x^2 = 3x - 2$ 有两个单根 $x = 1, 2$,

故上述递归表达式有一般解 $A_n = a + b2^n$. 容易验证 $A_1 = 3, A_2 = 7$, 代入一般表达式解得 $a = -1, b = 2$, 故 $A_n = 2^{n+1} - 1$.

4. 我们可以假设 $a \neq 0$, 用第一列的 a 消去其他非零元，再对称地用第一行的 a 消去其他非零元。然后我们用第二列的 a 和第二行的 a 消去其他非零元。结果如下：

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1st column}} \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ 0 & -d & -bd/a & f - eb/a \\ 0 & -e & -f - cd/a & -ec/a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{1st row}} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & d & e \\ 0 & -d & 0 & f - eb/a + cd/a \\ 0 & -e & -f - cd/a + eb/a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{2nd column \& row}} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f - eb/a + cd/a \\ 0 & 0 & -f - cd/a + eb/a & 0 \end{pmatrix}$$

由于以上行列变换不改变行列式，故

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = a^2(f + cd/a - eb/a)^2 = (af - be + cd)^2.$$

注：严格来讲，我们以上的运算是在环 $\mathbb{Z}[a,b,c,d,e,f][1/a]$ 中进行的. 但是环 $\mathbb{Z}[a,b,c,d,e,f]$ 是 $\mathbb{Z}[a,b,c,d,e,f][1/a]$ 的一个子环，故等式

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af - be + cd)^2$$

在 $\mathbb{Z}[a,b,c,d,e,f][1/a]$ 上成立,且等式两边的元素都落入 $\mathbb{Z}[a,b,c,d,e,f]$ 中，则等式在 $\mathbb{Z}[a,b,c,d,e,f]$ 上成立。也可以考虑摄动法或直接计算。

5. 我们消去第一行有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1^{n-1} & X_2^{n-1} & \cdots & X_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & X_2 - X_1 & \cdots & X_n - X_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & X_2^{n-1} - X_1^{n-1} & \cdots & X_n^{n-1} - X_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

对 $2 \leq i \leq n-1$, 我们把第 i 行乘以 $-X_1$ 加到第一行，行列式不变，为

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & X_2 - X_1 & \cdots & X_n - X_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & X_2^{n-2}(X_2 - X_1) & \cdots & X_n^{n-2}(X_n - X_1) \end{vmatrix} \\ = (X_2 - X_1)\cdots(X_n - X_1) &\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & X_2^{n-2} & \cdots & X_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ = (X_2 - X_1)\cdots(X_n - X_1) &\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_2^{n-2} & \cdots & X_n^{n-2} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

注意到式子后一部分是一个 $n-1$ 阶的 Vandermonde 行列式，故可用归纳法得到 n 阶 Vandermonde 行列式为

$$\Pi_{1 \leq i < j \leq n}(X_j - X_i).$$

6.

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1^{n-1} & X_2^{n-1} & \cdots & X_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & X_1 & \cdots & X_1^{n-1} \\ 1 & X_2 & \cdots & X_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_n & \cdots & X_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \Pi_{1\leq i<j\leq n}(X_j - X_i)^2.$$

7. 令 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则可以验证对任意 $1 \leq i \leq n-1$, $J^i = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-i} \\ I_i & 0 \end{pmatrix}$. 由于 $|\lambda I_n - J| = \lambda^n - 1$(请自行验证)，故该多项式有 n 个单根，即所有的 n 次单位根。记 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, 则 J 的所有特征值为 $\omega^i, 0 \leq i \leq n-1$. 由于 J 的特征多项式只有单根，J 可以对角化，于是存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}JP = diag(1, \omega, \cdots, \omega^{n-1})$. 令 $f(x) = a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}$, 注意到题目中的矩阵恰为 $a_1 + a_2J + \cdots + a_nJ^{n-1} = f(J)$, 于是 $P^{-1}f(J)P = diag(f(1), f(\omega), \cdots, f(\omega^{n-1}))$, 于是 $\det(f(J)) = \det(P^{-1}JP) = \Pi_{0\leq i\leq n-1}(a_0 + a_1\omega^i + \cdots + a_n\omega^{i(n-1)})$. 我们得到了一个该行列式的因式分解，而每个因子都是一次的，故不可约。

8. 若 $A = 0$, 则 $A^* = 0$, 从而 $\det(A^*) = 0$. 若 $A \neq 0$ 且不可逆，则 $AA^* = \det(A)I_n = 0$. 于是得到 A^* 也不可逆，否则等式两边乘以 $(A^*)^{-1}$ 得到 $A = 0$, 矛盾！故 $\det(A^*) = 0$. 若 A 可逆，则由 $AA^* = \det(A)I_n$ 知 $\det(A)\det(A^*) = \det(\det(A)I_n) = \det(A)^n$, 而 $\det(A) \neq 0$, 故 $\det(A^*) = \det(A)^{n-1}$.

9. 我们先说明：对于固定的 i, 函数 $j \to \binom{j}{i}$ 是一个首项系数为 $1/i!$ 的 i 次多项式。这是因为 $\binom{j}{i} = \frac{j(j-1)\cdots j-i+1}{i!}$ (注意此式对 $0 \le j \le i-1$ 仍然成立，此时等式两边为 0.) 我们记 $P_i(x) = \frac{x(x-1)\cdots x-i+1}{i!}$. 由归纳法我们可以证明存在系数 $c_{ij}, 0 \le j \le i-1$ 使得 $\frac{1}{i!}x^i = P_i(x) + c_{i,i-1}P_{i-1}(x) + \cdots + c_{i,0}P_0(x)$. 所求行列式为

$$\begin{vmatrix} P_0(0) & P_0(1) & \cdots & P_0(k-2) & P_0(k) & \cdots & P_0(n+1) \\ P_1(0) & P_1(1) & \cdots & P_1(k-2) & P_1(k) & \cdots & P_1(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_n(0) & P_n(1) & \cdots & P_n(k-2) & P_n(k) & \cdots & P_1(n+1) \end{vmatrix}$$

我们从下到上把第 j 行乘以系数 c_{ij} 加到第 i 行上去，得到行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & k-2 & k & \cdots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1/n! & \cdots & (k-2)^n/n! & k^n/n! & \cdots & (n+1)^n/n! \end{vmatrix}$$

由第 5 问知它等于

$$\frac{\Pi_{0 \le i < j \le n+1, i,j \ne k-1}(j-i)}{\Pi_{1 \le i \le n} i!}$$

由于

$$\frac{\Pi_{1 \le i \le n+1} i!}{\Pi_{0 \le i < j \le n+1}(j-i)} = 1$$

故可将它乘到上一式中并消去相同的项，得到

$$\frac{(n+1)!}{\Pi_{0 \le i < j \le n+1, i=k-1}(j-i)\Pi_{0 \le i < j \le n+1, j=k-1}(j-i)} = \frac{(n+1)!}{(n+1-(k-1))!(k-1)!} = \binom{n+1}{k-1}.$$

□

题 2. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 证明

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA).$$

证明. 我们考虑矩阵 $\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$ 用 I_m 消去左下角的 B 知其行列式为 $\det(I_n - BA)$, 用 I_n 消去右上角的 A 知其行列式为 $\det(I_m - AB)$, 故二者相等。

□

题 3. $M_n(\mathbb{R})$ 是实数域上的 n 阶方阵的集合. $\Phi: M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 是一个映射, 满足以下条件

(a) $\Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B), \forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$;

(b) 对任意上三角矩阵 $A \in M_n(\mathbb{R}), \Phi(A)$ 等于 A 的主对角线元素之积;

(c) 对任意下三角矩阵 $A \in M_n(\mathbb{R}), \Phi(A)$ 等于 A 的主对角线元素之积.

1. 证明: $\Phi(A) = |A|, \forall A \in M_n(\mathbb{R})$.
2. 如果 Φ 只满足条件 *(a)* 和 *(b)*, 结论是否成立? 请证明.

证明. 见讲义笔记. □

题 4. 考虑一串线性映射

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} V_n \xrightarrow{d_n} V_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} V_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots$$

其中 V_k 都是有限维 $\mathbb{R}$-向量空间, 并且对任何 $k \in \mathbb{Z}$, $d_{k-1} \circ d_k = 0$.

- 记 $Z_k = \ker d_k, B_k = \operatorname{im} d_{k+1}$, 证明 B_k 是 Z_k 的子空间, 由此定义商空间 $H_k = Z_k / B_k$.
- 设 $\{f_n \colon V_n \to V_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一串线性映射, 满足对任何 n, $d_n \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n$, 则 $f_n(Z_n) \subset Z_n, f_n(B_n) \subset B_n$.
- 利用商空间的性质说明, f_n 诱导了线性映射 $f_{n_*} \colon H_n \to H_n$, 使得如下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} Z_n & \xrightarrow{f_n} & Z_n \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_n} \\ H_n & \xrightarrow{f_{n_*}} & H_n \end{array}$$

  其中 $\pi_n \colon Z_n \to H_n = Z_n/B_n$ 是商空间的投影映射.

- *(Hopf 迹公式)* 设对某个 $N \in \mathbb{Z}_+$, 当 $|n| > N$ 时, $V_n = 0$. 证明

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \operatorname{tr}(f_n \colon V_n \to V_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \operatorname{tr}(f_{n_*} \colon H_n \to H_n).$$

  注意这里操作的实际上是有限和, 不涉及级数收敛问题.

- 假设所有的 f_n 都可逆，且对某个 $N \in \mathbb{Z}_+$，当 $|n| > N$ 时，$V_n = 0$. 请证明

$$\Pi_{n\in\mathbb{Z}}(\det(f_n\colon V_n \to V_n))^{(-1)^n} = \Pi_{n\in\mathbb{Z}}(\det(f_{n_*}\colon H_n \to H_n))^{(-1)^n}.$$

注意这里零维向量空间的线性变换的 det 定义为 1, 以上操作的实际上是有限乘积, 不涉及级数收敛问题.

证明. 若 $x \in B_k$ 则 $x = d_{k+1}(y)$，又因为 $d_k \circ d_{k+1} = 0$ 我们有 $d_k(x) = d_k \circ d_{k+1}(y) = 0$，因此 $B_k \subset Z_k$。先证明 $f_n(Z_n) \subset Z_n$, 若 $d_n(x) = 0$ 则 $d_n(f_n(x)) = f_n(d_n(x)) = 0$; 再证明 $f_n(B_n) \subset B_n$, 若 $x = d_{n+1}(y)$ 则 $f_n(x) = d_{n+1}(f_n(y))$。利用商的万有性质可得映射 $f_n : H_n \to H_n$ 以及交换性。

由于 $B_n \subset Z_n \subset V_n$ 都是 f_n 不变线性空间,因此 $tr(f_n; V_n) = tr(f_n; B_n) + tr(f_n; H_n) + tr(f_n; V_n/Z_n)$。我们断言 $tr(f_{n-1}; B_{n-1}) = tr(f_n; V_n/Z_n)$,而这个式子不难推出 Hopf 迹公式。事实上根据第一同构定理 $\tilde{d}_n : V_n/Z_n \to B_{n-1}$ 是线性空间的同构，且 $\tilde{d} \circ f = f \circ \tilde{d}$ 从而得到断言。

乘积公式类似. □

题 5. 记 $w = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$. 证明矩阵

$$W = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \cdots & \omega^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \omega^{3(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

可逆, 并求 W^{-1}.

证明. 由 Van der monde 行列式的计算得矩阵可逆。$W(w)W(w^{-1}) = I$ □