HW1:

4. 假设第 i 个网页的连接数为 V_i.（即顶点的 valence）

则 $$x_i = \sum_{\substack{j\in V \\ j与i连接}} \frac{x_j}{V_j}, \quad i \in V \quad (*)$$

代入 $x_i = V_i$

左边 $= V_i$. 右边 $= \sum_{\substack{j\in V \\ j与i连接}} 1 = V_i$.

即 $(*)$ 成立.

思考 $x_i = cV_i$ 是否是唯一解？

G 不连通不是. 其他的呢？

HW 2.

V是所有顶点的集合. B边界点的集合.

2. 设 $I=\{i_1 \cdots i_n\}$ 是内部点的集合.

$\forall i \in I$, $v_i = i$ 的连接边数

$$\forall i \in I, \quad x_i = \frac{1}{v_i}\left(\sum_{\substack{j \in V \\ j与i相连}} x_j\right) \qquad (*)$$

$\Rightarrow (*)$ $\underbrace{\text{线性方程组. 关于 } x_i,\ i \in I \text{ 的}}$

$(*)$ 有 n 个未知数, n 个方程.

只需证明在 $x_j=0, j\in B$ 时, 有唯一解.

此时假设 x_{i_0} 是 $x_{i_1} \cdots x_{i_n}$ 中的最大值.

且 $x_{i_0} \geq 0$, 则 $(*) \Rightarrow x_j = x_{i_0}$, 如果 j 与 i_0 相连.

G 连通 $\Rightarrow x_j = 0, \ \forall j \in V$

所以有 $x_{i_0} \le 0$

同理. $x_{i_1}, \dots x_{i_n}$ 的最小值 ≥ 0.

$\Rightarrow x_{i_1} = \dots = x_{i_n} = 0$.

$\Rightarrow$ (*) 对任意边界值有唯一解

---

4. $A = C$. Pf:

取 $b = A$ 的第 j 列. 则

$Ax = b$ 有解为 $x = e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

所以 $A \cdot e_j = b$. $C \cdot e_j = b$ 均成立.

$\Rightarrow A$ 的第 j 列 $= C$ 的第 j 列.

$\Rightarrow A = C$

HW 3.

2. $X = (v_1 \cdots v_n)$, $B = (b_1 \cdots b_n)$

$AX = B$，等价于 $A \cdot v_i = b_i$.

$AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow$ $Av_i = b_i$ 对 $i = 1 \cdots n$ 均有解

$\Leftrightarrow$ $\text{rank}(A) = \text{rank}(A \cdot b_i)$

$\Leftrightarrow$ 将A转化为 rref 的行变换作用于 (A, b_i) 时，最后一列没有 pivot.

$\Leftrightarrow$ 将A转化为 rref 的行变换作用于 (A, B) 时，最后n列没有 pivot.

$\Leftrightarrow$ $rk(A) = rk(A\ B)$

5. $A \cdot E_{ij} = E_{ij} A.$

取 $i=j$, $\Rightarrow A \cdot E_{ii} = E_{ii} A.$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ \text{A的 } i \text{列} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{A的} \\ i\text{行} \end{array}$$

$\Rightarrow$ A的i列中除第i个元素外 $=0$

A的i行中除第i个元素外 $=0$

$\Rightarrow A$ 对角. $A = \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{pmatrix}$

$A E_{ij} = E_{ij} A$, $i \neq j$

$\Rightarrow c_i = c_j$, $\Rightarrow A = \lambda I.$

HW4.

1. 思考 M 与 $\mathbb{C}$ 的关系.

$$M \xrightarrow{1:1} \mathbb{R}^2 \xleftrightarrow{1:1} \mathbb{C}.$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \longrightarrow a + b\sqrt{-1} = a+bi.$$

$V =$ 顶点集.

3. $\forall i \in V$, $x_i = \sum\limits_{j \in V,\, j 与 i 连接} \frac{1}{j 发出的连接数} x_j$,

$B = (p_{ij})$. $p_{ij} = \left(\frac{\delta_{ij}}{j 发出的连接数} \right)$

$B^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

即 $(B^T - I)x = 0$, 有非0解.

$\Rightarrow rk(B^T - I) < n$.

$\Rightarrow (B - I)x = 0$ 有非零解

9. $(I+A)^{-1} = I - A + A^2 + \cdots$

$(1+x)^{\frac{1}{m}} = \cdots\cdots$

Taylor

HW5. 5. 存在 P, Q 可逆.

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

此时. $rk(PBQ) = s$

$$rk(PAQ + PBQ) = rk(P(A+B)Q) = rk(A+B) = r+s$$

令 $A' = PAQ$, $B' = PBQ$

$$B' = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \quad B_1\ (r \times r)$$

$$A' + B' = \begin{pmatrix} I_r + B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

由于 $rk\left(\begin{array}{c|c} I_r + B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{array}\right)$

$$\leq rk\begin{pmatrix} I_r + B_1 \\ B_3 \end{pmatrix} + rk\begin{pmatrix} B_2 \\ B_4 \end{pmatrix}$$

$$\le r + rk\ B' = r+s$$

所以 $rk\begin{pmatrix} B_2 \\ B_4 \end{pmatrix} = rk\ B' = s$

所以存在列变换 $Q_1 = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ C & I \end{pmatrix}$ 使得

$$B' \cdot Q_1 = \begin{pmatrix} 0_{r\times r} & B_2 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}, \quad A' \cdot Q_1 = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同理: $rk\left(\begin{array}{cc} I_r & B_2 \\ \hline 0 & B_4 \end{array}\right)$

$$\le r + rk(B_4) = r+s$$

$\Rightarrow rk(B_4) = rk\begin{pmatrix} B_2 \\ B_4 \end{pmatrix} = s$

$\Rightarrow$ 存在 $P_1 = \begin{pmatrix} I_r & C_2 \\ 0 & I \end{pmatrix}$

$$P_1 \cdot \begin{pmatrix} B_2 \\ B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_4 \end{pmatrix}$$

又有可逆阵

$$P_2 = \begin{pmatrix} I_r & \\ & C_3 \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} I_r & \\ & C_4 \end{pmatrix}$$

$$C_3 B_4 C_4 = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

때 $(P_2 P_1 P) A (Q Q_1 Q_2) = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(P_2 P_1 P) B (Q Q_1 Q_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$