1. $\underline{rk\, A = 1} \xRightarrow[\text{problem 6}]{HW4} A = \alpha \cdot \beta^T.$

由于 $C(A) = \text{span}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}.$

$R(A) = \text{span}\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$

所以 $\alpha \in \text{span}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$. 且 $\alpha \neq 0$

$\beta \in \text{span}\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$, 且 $\beta \neq 0$.

$\Rightarrow A = c \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \cdot (2\ 3\ 4) \quad c \neq 0$

2. 存在 $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$,

使得:

$A \cdot e_1 = c_1 e_1$

$A e_2 = c_2 e_2$

$A e_3 = c_3 e_3$

$A \cdot (e_1 + e_2) = c_4 (e_1 + e_2)$

$\Rightarrow c_1 e_1 + c_2 e_2 = c_4 e_1 + c_4 e_2$

$\Rightarrow c_1 = c_4, \quad c_2 = c_4$

$\Rightarrow c_1 = c_2$

同理 $c_2 = c_3$,

令 $c = c_1 = c_2 = c_3$.

则 $A e_i = c e_i$

$\Rightarrow A \cdot v = c \cdot v \Rightarrow A = c I_3$.

3. $Ax = 0 \iff x \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $x \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \iff$

$$\mathrm{rk} \begin{pmatrix} 2 & x_1 \\ 3 & x_2 \\ 4 & x_3 \end{pmatrix} = \mathrm{rk} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\iff \mathrm{rk} \begin{pmatrix} 2 & x_1 \\ 0 & x_2 - \frac{3}{2} x_1 \\ 0 & x_3 - 2x_1 \end{pmatrix} = \mathrm{rk} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 - \frac{3}{2} x_1 = 0 \\ x_3 - 2x_1 = 0 \end{cases}$$

可取 $A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1, & 0 \\ -2, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$

4. ① $\ker A \neq \{0\}$.

因为对某一些 b，$Ax=b$ 有无穷多组解。

有解时，$Ax=b$ 的解形如 x_0+y，$y\in\ker A$.

若 $\ker A=\{0\}$，则 $Ax=b$ 至多一个解。

② 不是。因为对于某些 b，$Ax=b$ 无解。

此 $b\notin C(A)$

③ 没有。由 ①②，$Ax=b$ 要么无解，要么有无穷多组解。

④ $C(A)\subsetneq \mathbb{R}^m \Rightarrow r<m$.

$\dim\ker(A)+\dim(C(A))=n$，$\ker A\neq\{0\}$

$\Rightarrow \dim(C(A))<n$

$r<n$.

5. (课上原题是 $rk(A+I)+rk(A-I)=n \iff A^2=I$.)

方法一样.

$$\begin{bmatrix} A+I & \\ & A-I \end{bmatrix} \xrightarrow{行变换} \begin{bmatrix} A+I & A-I \\ & A-I \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{列变换} \begin{bmatrix} 2I & A-I \\ I-A & A-I \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{行变换} \begin{bmatrix} 2I & A-I \\ 0 & AI+\frac{1}{2}(A-I)^2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{列变换} \begin{bmatrix} 2I & 0 \\ 0 & (A-I)+\frac{1}{2}(A-I)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2I & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(A^2-I) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow rk(A+I) + rk(A-I) = rk(2I) + rk\left(\frac{1}{2}(A^2-I)\right)$$

$$= n + rk(A^2-I)$$

其他方法见下图.

法1 构造分块对角 利用初等变换直接证；下面给出其他证法

Claim 1 ： $\operatorname{rank}(A+I)+\operatorname{rank}(A-I)\leqslant n+\operatorname{rank}(A^2-I)$

方法(1)

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "A+I"] \arrow[rr, bend left, "A^2-I"] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "A-I"] & \mathbb{R}^n \\
 & \cup & \cup \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "A+I"] & \operatorname{Im}(A+I) \arrow[r, "(A-I)|_{res}"] & \operatorname{Im}(A^2-I)
\end{tikzcd}
$$

restriction

$$x \longmapsto (A+I)x \longmapsto (A^2-I)x$$

$$\dim\ker\left((A-I)|_{res}\right)=\operatorname{ran}(A+I)-\operatorname{rank}(A^2-I)$$

$$\leqslant \dim\ker(A-I)=n-\operatorname{rank}(A-I)$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}(A+I)+\operatorname{rank}(A-I)\leqslant n+\operatorname{rank}(A^2-I)$$

方法(2) Frobenius 秩不等式

$$\underset{\operatorname{rank}(A+I)}{\underset{\parallel}{\operatorname{rank}((A+I)I)}}+\underset{\operatorname{rank}(A-I)}{\underset{\parallel}{\operatorname{rank}(I(A-I))}}\leqslant \underset{\operatorname{rank}(A^2-I)}{\underset{\parallel}{\operatorname{rank}((A+I)I(A-I))}}+\underset{n}{\underset{\parallel}{\operatorname{rank}(I)}}$$

Claim 2 ： $n+\operatorname{rank}(A^2-I)\leqslant\operatorname{rank}(A+I)+\operatorname{rank}(A-I)$

Pf 设 X 是线性方程组 $(I-A)X=0$ 的解，解空间记为 U

$(I+A)Y=0$ 的解空间记为 V

$(I+A)(I-A)Z=0$ 的解空间记为 W.

$\parallel$

$(I-A)(I+A)Z$

$\big((I+A)+(I-A)\big)\alpha=0$ 的解空间记为 H

显然 $U\subseteq W$, $V\subseteq W$. 从而 $U+V\subseteq W$, $U\cap V\subseteq H$

由维数公式 $\underset{n-\operatorname{rank}(I-A)}{\underset{\parallel}{\dim U}}+\underset{n-\operatorname{rank}(I+A)}{\underset{\parallel}{\dim V}}=\dim(U\cap V)+\dim(U+V)\leqslant \underset{n-\operatorname{rank}(A^2-I)}{\underset{\parallel}{\dim W}}+\underset{\underset{0}{\underset{\parallel}{n-\operatorname{rank}(2I)}}}{\underset{\parallel}{\dim H}}$ #