线性代数 期末考试 2 小时

2025 年 7 月 5 日

一共 2 页，5 道大题，请写出每道题的解答过程.

题 1. 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 6\\2 & 1\end{bmatrix}.$$

定义线性变换 $T\colon M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$ 为 $T(X)=AXB$，求 T 的行列式和迹.

题 2. 设 $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1\\ & & & 1 & 2\end{bmatrix}$ 是一个 2025 阶方阵.

1. 求 $\det(A)$.
2. 证明 2 为 A 的一个特征值，并求出这个特征值对应的一个特征向量。

题 3. 设 $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\4 & -2 & 2\\-2 & 1 & -1\end{bmatrix}$.

1. 求 A 的特征多项式
2. 求 A 的若当标准型, 并且找到一个可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为若当标准型.
3. 求 A^{100}.

题 4. 假设 V 是次数小于或等于 100 的复系数多项式全体构成的线性空间. 定义 V 上的一个线性变换为 $T(f(x))=f(x)-f(\sqrt{-1}x)$. 求 $\operatorname{Im}T$ 的维数.

题 5. 设 α 和 β 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个非零列向量，A 是一个 $n \times n$ 矩阵，定义为 $A = \alpha\beta^T$。$\mathbb{R}^n$ 上的对称双线性型 g 定义为 $g(x, y) = x^T y$，其中 $x, y \in \mathbb{R}^n$。

1. 如果 $g(\alpha, \beta) = 0$，A 在 $\mathbb{R}$ 上可对角化吗?

2. 如果 $g(\alpha, \beta) \neq 0$，A 在 $\mathbb{R}$ 上可对角化吗?

请证明你的结论。