

# 线性代数 作业 1

这次作业里所有矩阵不加说明都是实数矩阵.

## 1 基础题

本部分题必做.

题 1. 用消元法解线性方程组

1. 关于两个变元  $x_1, x_2$  的线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

2. 关于四个变元  $x_1, x_2, x_3, x_4$  的线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

3. 关于三个变元  $x, y, z$  的线性方程组

$$\begin{cases} 2x + y - z = 8 \\ -3x - y + 2z = -11 \\ -2x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

题 2. 讨论  $\lambda$  取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有唯一解，无穷多解，无解，并在有解时求其解。

**题 3.** 考虑包含  $m$  个主元的最简阶梯型的  $m \times n$  的实矩阵，如果主元出现的位置相同的这样的矩阵视作一类，求不同的种类数有多少？

**题 4.** 考虑一个连通无向无圈无多重边的有限图  $G$ . 令  $V$  是顶点的集合，将其视为网页，构造如下网络. 如果两个顶点之间有边连接，则假设两个网页之间有彼此两个方向之间的超链接连接. 我们利用 *Google* 的 *PageRank* 算法得到关于每个网页重要性  $(x_i)_{i \in V}$  的线性方程组. 证明此时  $x_i$  等于经过顶点  $i$  的边数是这个方程组的一组解.

**题 5.** 构造一个 3 阶方阵，其 9 个元素各不相同，且行简化阶梯形有且只有一个主元.

**题 6.** 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

证明

1.  $Ax = b$  有解当且仅当  $b_1 + b_2 + b_3 = 0$ .

2.  $Ax = 0$  的解集是  $\{kx_1 : k \in \mathbb{R}\}$ , 其中  $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

3. 当  $Ax = b$  有解时，若  $x_0$  是一个解，则解集是  $\{x_0 + kx_1 : k \in \mathbb{R}\}$ .