线性代数 作业 11

2025 年 4 月 1 日

题 1. 计算下列行列式:

1.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & -3 \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z & x & 1 \\ z & x & y & 1 \\ \frac{z+x}{2} & \frac{x+y}{2} & \frac{y+z}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

3.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

4. 因式分解

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

5. *Vandermonde* 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1^{n-1} & X_2^{n-1} & \cdots & X_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

6.

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

其中 $s_k = X_1^k + X_2^k + \cdots X_n^k$.

7. 在复数域 $\mathbb{C}$ 上, 将关于 n 个变量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的多项式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

分解为不可约因子乘积.

8. $\det(A^*)$, 其中 A^* 是方阵 A 的伴随.

9. $(n+1) \times (n+2)$ 的矩阵

$$A = (a_{ij}) = \left(\binom{j-1}{i-1} \right), 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq n+2,$$

A_k 为 A 去掉第 k 列得到的矩阵, 计算 $\det(A_k)$.

题 2. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 证明

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA).$$

题 3. $M_n(\mathbb{R})$ 是实数域上的 n 阶方阵的集合. $\Phi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 是一个映射, 满足以下条件

(a) $\Phi(AB)=\Phi(A)\Phi(B), \forall A,B\in M_n(\mathbb{R})$;

(b) 对任意上三角矩阵 $A\in M_n(\mathbb{R}), \Phi(A)$ 等于 A 的主对角线元素之积;

(c) 对任意下三角矩阵 $A\in M_n(\mathbb{R}), \Phi(A)$ 等于 A 的主对角线元素之积.

1. 证明: $\Phi(A)=|A|, \forall A\in M_n(\mathbb{R})$.

2. 如果 Φ 只满足条件 *(a)* 和 *(b)*, 结论是否成立? 请证明.

题 4. 考虑一串线性映射

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} V_n \xrightarrow{d_n} V_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} V_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots$$

其中 V_k 都是有限维 $\mathbb{R}$-向量空间, 并且对任何 $k\in\mathbb{Z}$, $d_{k-1}\circ d_k=0$.

- 记 $Z_k=\ker d_k, B_k=\operatorname{im} d_{k+1}$, 证明 B_k 是 Z_k 的子空间, 由此定义商空间 $H_k=Z_k/B_k$.

- 设 $\{f_n\colon V_n\to V_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一串线性映射, 满足对任何 n, $d_n\circ f_n=f_{n-1}\circ d_n$, 则 $f_n(Z_n)\subset Z_n, f_n(B_n)\subset B_n$.

- 利用商空间的性质说明, f_n 诱导了线性映射 $f_{n_*}\colon H_n\to H_n$, 使得如下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} Z_n & \xrightarrow{f_n} & Z_n \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_n} \\ H_n & \xrightarrow{f_{n_*}} & H_n \end{array}$$

  其中 $\pi_n\colon Z_n\to H_n=Z_n/B_n$ 是商空间的投影映射.

- *(Hopf 迹公式)* 设对某个 $N\in\mathbb{Z}_+$, 当 $|n|>N$ 时, $V_n=0$. 证明

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n\operatorname{tr}(f_n\colon V_n\to V_n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n\operatorname{tr}(f_{n_*}\colon H_n\to H_n).$$

  注意这里操作的实际上是有限和, 不涉及级数收敛问题.

- 假设所有的 f_n 都可逆, 且对某个 $N\in\mathbb{Z}_+$, 当 $|n|>N$ 时, $V_n=0$. 请证明

$$\Pi_{n\in\mathbb{Z}}(\det(f_n\colon V_n\to V_n))^{(-1)^n}=\Pi_{n\in\mathbb{Z}}(\det(f_{n_*}\colon H_n\to H_n))^{(-1)^n}.$$

  注意这里零维向量空间的线性变换的 det 定义为 1, 以上操作的实际上是有限乘积, 不涉及级数收敛问题.

题 5. 记 $w = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$. 证明矩阵

$$W = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \cdots & \omega^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \omega^{3(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

可逆, 并求 W^{-1}.