线性代数 作业 12

2025 年 4 月 8 日

1 基础题

本部分题必做.

题 1. 模仿四元域的构造方法，构造一个域 F，使得 F 包含 9 个元素.

题 2. 利用域 F 的运算规律证明 $0 \cdot a = 0$ 对任意 $a \in F$ 成立.

题 3. 证明域中不存在零因子，或者等价的说，不存在两个非零元素的乘积等于零.

题 4. 验证 $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}] = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 作为 $\mathbb{C}$ 的子集，在 $\mathbb{C}$ 的乘法和加法下是一个域.

题 5. 设 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$，其中 $a_n \neq 0$。令 $f(x) \cdot \mathbb{R}[x]$ 为 $\mathbb{R}[x]$ 的子空间，包含所有能被 $f(x)$ 整除的多项式。

1. 求 $V = \mathbb{R}[x]/(f(x) \cdot \mathbb{R}[x])$ 的一个基，并计算其维数。
2. 考虑线性变换 $T\colon V \to V$，定义为 $\overline{g}(x) \mapsto \overline{x} \cdot \overline{g}(x)$。求 T 在所选基下的矩阵表示。

Let $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$ where $a_n \neq 0$. Let $f(x) \cdot \mathbb{R}[x]$ be the subspace of $\mathbb{R}[x]$ consisting of polynomials divisible by $f(x)$.

1. *Find a basis of $V = \mathbb{R}[x]/(f(x) \cdot \mathbb{R}[x])$ and compute its dimension.*
2. *Consider the linear transformation $T\colon V \to V$ such that $\overline{g}(x) \mapsto \overline{x} \cdot \overline{g}(x)$. Find the matrix representing T with respect to your basis.*

题 6 (系数的限制)**.** 假设 F 是域 K 的子集，且在 K 的加法乘法的运算下做成一个域，则称 F 是 K 的子域. 证明

1. K 在乘法和加法下做成 F 的线性空间.
2. 假设 V 是一个 K 线性空间，证明 V 在 F 继承 K 的数乘运算下做成 F 线性空间，并证明 $\dim_F V = \dim_F K \cdot \dim_K V$.(你可以假设这里的维数均有限.)
3. 以下问题中，我们假设 $F = \mathbb{R}$，$\dim_F K = 2$. 证明可将 $1 \in K$ 添加 $\alpha \in K$ 扩张成 K 的一组 F 基，且 $\alpha^2 = -1$.
4. 用以上各问中的记号和假设，证明 α 的数乘定义了一个 V 上的 F 线性变换 $T_\alpha(v) = \alpha \cdot v$. 请找到一组基，写下这组基下的 T_α 的矩阵. 并且证明这个矩阵的平方等于 $-I$.

题 7. 假设 $\alpha \in \mathbb{R}$. 将 $\mathbb{R}$ 视为 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间.

1. 证明 α 是无理数等价于 $1, \alpha$ 是 $\mathbb{Q}$-线性无关.
2. 称 α 是代数数，如果存在多项式 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$，使得 $f(\alpha) = 0$. 否则，我们称 α 是超越数. 定义 $\mathbb{Q}[\alpha] = \{g(\alpha) \mid g(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$. 证明 α 是代数数等价于 $\mathbb{Q}[\alpha]$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的有限维线性空间.