线性代数 作业 13

2025 年 4 月 29 日

1 基础题

题 1 (4 选 2 做即可)**.** 判断下列矩阵 A 是否可在复数域上对角化. 在可对角化的情形, 给出可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵.

1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

题 2. 已知 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 的特征值 *(按代数重数计)* 为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$*(其中可能有相同的数)*. 对多项式 $f = a_m X^m + \cdots a_0 \in \mathbb{C}[X]$, 定义 $f(A) = a_m A^m + \cdots + a_0 I_n$. 则 $f(A)$ 的特征值集合 *(按代数重数计)* 是什么?*(Hint: 考虑上三角化)*

题 3. 固定复数 $b, c \in \mathbb{C}$. 假设有数列 (a_n) 满足递推公式 $a_{n+1} = ba_n + ca_{n-1}$. 以下你将利用矩阵对角化和上三角化来求通项公式.

1. 令向量 $x_n = (a_n, a_{n-1})^T$. 写下 x_n 的递推公式 $x_n = Ax_{n-1}$. 其中 A 是二阶复方阵.
2. 求矩阵 A 的特征值 λ_1, λ_2 并判断在复数域上是否可以对角化.
3. 如果 A 可以对角化，利用对角化求 A^n.
4. 如果 A 不能对角化，证明 A 相似于矩阵 $\lambda_1 I_2 + N$, 其中 $N^2 = 0$. 利用二项展开求 A^n.

题 4. 证明复循环矩阵

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$$

(在复数域上) 可对角化，并求该矩阵的特征值以及行列式. *(Hint: 考虑循环方阵*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

和习题 2.)

题 5. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 满足 $\mathrm{tr}(A^k) = 0$, 对任何 $0 < k \leq n$. 证明 $A^n = 0$. *(Hint: 考虑习题 2.)*

题 6. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ 满足 $AB = BA$, 证明 A 的某个特征值对应的特征子空间也是 B 的不变子空间.

题 7. 设 $\mathcal{T} \subset M_n(\mathbb{C})$ 是一些交换矩阵构成的集合, 即对任何 $T_1, T_2 \in \mathcal{T}, T_1 T_2 = T_2 T_1$. 证明, $\mathcal{T}$ 可以同时上三角化, 即存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, 使得对任何 $T \in \mathcal{T}, P^{-1}TP$ 是上三角矩阵.

题 8. 考虑平面上绕原点的旋转变换对应的矩阵，求其复特征值，并判断在复数域上是否可以对角化.

题 9 (选做题)**.** 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ 满足 $AB - BA = A$, 证明 A, B 有公共的特征向量.

题 10. 假设 $A = (a_{ij})$ 是复方阵。定义 $D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i, 1 \leq j \leq n} |a_{ij}|\}$ 为复平面上的圆盘。证明 A 的特征值落在这些圆盘的并里 $\cup_i D_i$。(这称为 *Gershgorin circle theorem*，有更精细的估计在哪些圆盘里有多少特征值的版本。在估计特征值范围时还可以用对角矩阵 Λ 共轭作用于 A，即考虑 $\Lambda^{-1} A \Lambda$ 来改变圆盘的位置，请思考如何选取 Λ 来得到更精细的估计。)