线性代数 作业 14

2025 年 5 月 7 日

题 1. 对域 F 上的二阶方阵 A，请通过直接计算验证 *Cayley-Hamilton* 定理: A 的特征多项式为 $f_A(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A)$，则 A 满足 $f_A(A) = 0$. 请思考该定理中将域上的方阵替换成任意环上是否依然成立.

题 2. 利用 *Cayley-Hamilton* 定理，证明域 F 上的任意可逆方阵 A 的伴随都可以写成 A 的多项式. 请思考对于环 R 上的一般方阵 A(不要求可逆) 这个结论是否依然成立.

题 3. 假设 T 是 F-线性空间 V 上的线性变换，W 是 T 的不变子空间. 如果 T 可对角化，请问 T 在 W 的限制是否一定可对角化? 如果是请证明，如果不是请给出反例.

题 4. 对域 F 上的方阵 A，如果 μ 是 A 的特征值，证明 μ 一定是 A 的极小多项式的根.

题 5. 假设复方阵 A 满足 $A^n = I$, 证明 A 可以复对角化.

题 6. 假设两个实方阵在复数域上相似，证明其在实数域上也相似.

题 7. 假设 n 阶实方阵 A 满足 $A^2 = -I$，证明 A 的阶数 n 为偶数，且 A 在实数域上不能对角化，在复数域上可以对角化. 请对每个偶数 n 给出一个这样的矩阵的例子.

题 8. 找出以下矩阵 A 的极小多项式.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$