

线性代数 作业 15

2025 年 5 月 9 日

题 1. 在 *Google PageRank* 算法中, 我们写下了一个 n 维向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 表示一个网页的权重。我们假设每个网页都有一个初始权重 x_i , 并且第 j 个网页都有一个链到其他网页 i 的概率 p_{ij} 。我们可以用一个 $n \times n$ 的矩阵 $P = (p_{ij})$ 来表示这个概率分布, 并且求解权重向量时, 写下了方程 $Px = x$ 。请证明 P 有特征值 1, 并且所有复特征值的绝对值小于等于 1。

题 2. 假设写出一个用极小多项式判定域 F 上的 n 阶方阵 A 是可上三角化的充分必要条件, 并证明。

题 3. 假设域 F 上的 n 阶方阵 A 是对角化的, 证明 A^T 也是对角化的。请思考当 A 可上三角化时, A^T 是否也可上三角化。

题 4. 假设域 F 上的 n 阶方阵 A 是对角化的, m 阶方阵 B 也是可以对角化的, 证明 F 线性空间 $M_{n \times m}(F)$ 上的线性变换 $T, T(X) = AXB$ 也是对角化的。请找出 T 的 *determinant* 和 *trace* 与 A 和 B 的关系。请思考 A 和 B 可上三角化时, T 是否也可上三角化。

题 5. 假设域 F 上的有限维线性空间有线性变换 T , 和 T 的不变子空间 W , 则 T 诱导了商空间上 V/W 上的线性变换 \tilde{T} 。证明 T 的特征多项式等于 $T|_W$ 和 \tilde{T} 的特征多项式的乘积。

题 6. 对域 F 上的 n 阶方阵 A , 特征多项式 $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + s_1 \lambda^{n-1} + \dots + s_n$ 的展开系数 s_k 定义了函数 $S_k: M_n(F) \rightarrow F, A \mapsto s_k$ 。证明这些函数满足 $S_k(AB) = S_k(BA)$ 。请思考将域 F 换成任意交换环 R , 这个结论是否成立。

题 7. 假设可交换的复方阵 A 和 B , 满足 $B^n = 0$ 。证明 A 和 $A + B$ 有相同的特征多项式。请思考将复数域换成任意域 F , 这个结论是否成立。

题 8. 请验证 R -模 M 中满足以下等式

1. $0_R \cdot m = 0_M, \forall m \in M.$

2. $-1 \cdot m = -m, \forall m \in M.$

3. $r \cdot 0_M = 0_M, \forall r \in R.$

题 9. 请验证课上关于商模的构造的良定部分.