线性代数 作业 16

2025 年 5 月 16 日

题 1. 考虑复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 阶方阵组成的线性空间 $V = M_n(\mathbb{C})$, 以及 V 上的线性变换

$$T\colon V \to V, X \mapsto A^T X A.$$

1. 假设 W 是对称矩阵组成的 V 的子空间, U 是对称矩阵组成的 V 的子空间, 证明 $V = W \oplus U$, 且 W 和 U 都是 T 的不变子空间.
2. 求线性变换 $T|_W\colon W \to W$ 和 $T_U\colon U \to U$ 的行列式以及迹，请用 A 的行列式以及迹表示.

题 2. 如下归纳地定义方阵

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & I \\ I & -A_{n-1} \end{bmatrix}.$$

求 A_n 的特征多项式.

题 3. 请对以下 $f, g \in F[t]$ 求以下带余除法, $f = gq + r$.

1. $f = t^3 + 2t^2 + 3t + 4, g = t^2 + t + 1$.
2. $f = t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1, g = t^3 + t^2 + t + 1$.

题 4. 假设域 F 上的 n-阶矩阵 A 的特征多项式 $f_A(\lambda)$ 等于其极小多项式，证明 A 相似于 f_A 的友阵.

题 5. 请用直接计算行列式的方法计算出友阵的特征多项式.

题 6. 1. 假设 I 是环 R 的理想，请在商集 R/I 上定义加法和乘法，使得 R/I 成为一个环.

2. 如果一个 F 线性空间 V 上的线性变换 T 对应的极小多项式是 $m(\lambda)$, 请证明 V 有 $F[\lambda]/(m(\lambda))$-模结构.

3. 假设 n-维实线性空间 V 上有一个线性变换 T 满足 $T^2 = -Id$. 请利用 T 给出 V 的一个复线性空间结构.

4. 在以上的条件下，假设 A 是 V 上的所有和 T 交换的实线性变换组成的实线性空间. 请求出 $\dim_{\mathbb{R}} A$. *(提示：构造 A 和 $End_{\mathbb{C}}V$ 之间的同构.)*

题 7. 以下是使用对角化的极小多项式判定法则来求解微分方程的例子. 假设 V 是 $\mathbb{R}$ 上无穷次可导的实值函数组成的线性空间. 线性变换 $D\colon V \to V$ 定义为 $D(f) = f'$. 令 $a_1 \cdots a_n$ 是互不相同的实数, W 是线性变换 $(D - a_1 Id) \circ \cdots \circ (D - a_n Id)$ 的 *kernel*. 证明

1. W 是 D 的不变子空间.

2. 模仿线性代数中对角化的极小多项式判定法则，证明 W 是 $\ker(D - a_i Id)$ 的直和, 即 $W = \oplus_{i=1}^n \ker(D - a_i Id)$

3. 已知 $f' = f$ 的解形如 $f(x) = Ce^x$，其中 C 是任意实数. 求解
$$f'' - 3f' + 2f = 0.$$

4. *(选做)* 请尝试推广以上结论到齐次的常系数线性微分方程的情形. 你需要求解哪些基础的微分方程来得到所有的解.

题 8 (选做)**.** 假设 R 是交换环, $m \leq n$ 是正整数. 假设 $A \in M_{m\times n}(R)$ 是一个元素取值在 R 上的 $m \times n$ 矩阵. 假设 I 是 A 的 $m \times m$ 子式生成的 R 的理想. 对任意 $f \in I$, 存在矩阵 $B \in M_{n\times m}(R)$ 使得 $AB = fI_m$. 这里 $m \times m$ 子式指的是 A 中任意取出不重复的 m 行 m 列得到的行列式.