线性代数 作业 17

2025 年 5 月 24 日

1 中文版

题 1.1. 设 F 是一个域，$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_0 \in F[x]$。类似微积分，定义 f 的导数为 $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$。对于 $f(x), g(x) \in F[x]$，证明：

1. $(fg)' = fg' + f'g$。
2. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'$。
3. $\gcd(f, f') = 1$ 当且仅当 f 的不可约分解中没有重因子。

题 1.2. 证明 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 不是有限生成的 $\mathbb{Z}$-模。

题 1.3. 求以下 $\mathbb{Z}$ 上矩阵的 *Smith* 标准形：

$$\begin{bmatrix} 15 & 6 & 9 \\ 6 & 6 & 6 \\ -3 & -12 & -12 \end{bmatrix}.$$

题 1.4.

定义 1. 设 R 是一个环，$A \in M_{m\times n}(R)$。取 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行和 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 列组成的子矩阵的行列式称为 A 的 $k \times k$ 子式。所有 $k \times k$ 子式的最大公因数称为第 k 个行列式因子 a_k。

1. 类似域 F，定义 R 上的初等矩阵。有三类初等矩阵：

   (a) $E_{ij}(\lambda)$：在单位矩阵上，将第 i 行的 $\lambda \in R$ 倍加到第 j 行。

(b) $E_{ii}(\lambda)$：在单位矩阵上，将第 i 行乘以 $\lambda \in R^{\times}$，其中 $R^{\times}$ 是 R 中的可逆元集合。

(c) $E_{ij}(\lambda)$：在单位矩阵上，交换第 i 行和第 j 行。

证明：若 R 是欧几里得环，则任意可逆矩阵 $A \in M_n(R)$ 都可以表示为有限个初等矩阵的乘积。

2. 当 R 是欧几里得环时，证明 A 左右乘可逆矩阵时，(a_k) 不变。

3. 证明行列式因子和不变因子可以互相确定。*(在乘以 R 中乘法可逆元的意义下)*

题 1.5. 1. 假设 $f(x) \in F[x]$ 是域 F 上的不可约多项式，证明 $F[x]/(f)$ 在商环结构下也是一个域.

2. 请对 $\mathbb{R}$ 上的不可约多项式构造域，并且证明这些域只能同构于 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$.

2 英文版

题 2.1. *Let F be a field and $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_0 \in F[x]$. Define the derivative of f similarly as calculus. $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$. For $f(x), g(x) \in F[x]$, prove*

1. $(fg)' = fg' + f'g$.

2. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'$.

3. $\gcd(f, f') = 1$ *if and only if in the irreducible factorization of f, there are no factors with multiplicities.*

题 2.2. *Prove that $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ is not a finitely generated $\mathbb{Z}$-module.*

题 2.3. *Find the Smith normal form of the following matrix over $\mathbb{Z}$:*

$$\begin{bmatrix} 15 & 6 & 9 \\ 6 & 6 & 6 \\ -3 & -12 & -12 \end{bmatrix}.$$

题 2.4.

定义 2. *Let R be a ring and $A \in M_{m\times n}(R)$. The determinant of submatrix with $i_1, i_2, \cdots, i_k$th rows and $j_1, j_2, \cdots, j_k$th columns is called a $k \times k$-minor of A. The greatest common divisor of all $k \times k$-minors is called a determinant divisors a_k.*

1. *Define the elementary matrix over R similarly as field F. There are three types of elementary matrices:*

    (a) *$E_{ij}(\lambda)$: For indentiy matrix, add $\lambda \in R$ times ith row to jth row.*

    (b) *$E_{ii}(\lambda)$: For indentity matrix, multiply ith row by $\lambda \in R^\times$. Here $R^\times$ is the set of mulplicative invertible elements in R.*

    (c) *$E_{ij}(\lambda)$: For indentiy matrix, swap ith row and jth row.*

    Show that if R is a Euclidean domain, then any invertible matrix $A \in M_n(R)$ is the product of a finite number of elementary matrices.

2. *When R is Euclidean Domain, show that a_k does not change when A is multiplied by invertible matrices on the left or right.*

3. *Show that determinant divisors and invariant factors determines each other.*

题 2.5. 1. *Suppose $f(x) \in F[x]$ is an irreducible polynomial over the field F. Prove that $F[x]/(f)$ is also a field under the quotient ring structure.*

2. *Construct fields from irreducible polynomials over $\mathbb{R}$ and prove that these fields can only be isomorphic to $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$.*