线性代数 作业 18

2025 年 6 月 1 日

题 1. 计算矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ 的 *Jordan* 标准型

题 2. 利用二项式展开求若当块 $J = J_{\lambda,n}$ 的 k 次方. 比较你的公式和 x^k 的各阶导数的关系，从而推导出对一般的多项式 f, 矩阵 $f(J)$ 的表达形式.

题 3. 利用若当标准型证明，如果 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 是一个可逆矩阵，则存在一个复方阵 B 使得 $B^2 = A$. 如果 A 不可逆，该结论是否依然成立?

题 4. 假设域 F 上的有限维线性空间 V 上的线性变换 T 的特征多项式有某一个不可约因子 $p(\lambda)$, 证明 T 存在维数为 $\deg p$ 的不变子空间

题 5. 假设 T, S 均为有限维 F-线性空间 V 上的线性变换, 且 $TS = ST$, 证明 T 的广义特征子空间也是 S 的不变子空间.

题 6. 假设 F 是一个域, 且 $\{A_i\}_{i\in I}$ 是一族两两乘法可换的方阵，且 A_i 均可以对角化。证明存在同一个可逆方阵 P 使得对任意 $i \in I$，$P^{-1}A_iP$ 都是对角阵.

题 7. 对一般的域 F，证明如果 $A \in M_n(F)$ 是一个幂零矩阵，即 $A^m = 0$ 对某一个整数 m 成立, 则 A 在 F 上相似于某一个若当标准型.

题 8. 证明任意一个复数域上的 n 阶方阵 A 可以写作两个矩阵 D 和 N 的和，其中 D 是可对角化矩阵，N 是幂零矩阵，且 $DN = ND$。*(选做题：证明这样的分解是唯一的。)*

题 9. $A : V \to V$ 是有限维复线性空间的算子，$m_A(x) \in \mathbb{C}[x]$ 是算子的极小多项式并有素分解 $m_A(x) = \Pi_{i=1}^{k}(x - \lambda_i)^{n_i}$。令 $V_i = ker((A - \lambda_i I)^{n_i})$。证明

$$V = \bigoplus V_i$$

题 10. 考虑 $N \in M_5(\mathbb{C})$ 满足 $N^3 = 0$. 请问这样的 N 在复数域上的相似类有多少个? 请从中挑一个类描述所有和 N 交换的矩阵的形式.

题 11. 假设域 F 上的有限维线性空间 V 上的线性变换 T 的特征多项式不可约, 找出所有的 T 不变子空间.

题 12. 假设 A 是一个可对角化的 n 阶复方阵，且 A 的互不相同特征值为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$，其中每个 λ_i 的代数重数为 m_i，求与 A 乘法交换的所有 n 阶方阵组成的 $M_n(\mathbb{C})$ 子空间的维数.

题 13. 假设实方阵 A 满足 $A^2 = -I$，证明 A 的阶数为偶数，且对每个固定的阶数，求出这样的 A 的相似类有多少个? 对每一个固定的 $2n$-阶矩阵 A，将与 A 乘法交换的实方阵全体 V 和 $M_n(\mathbb{C})$ 建立一个双射, 从而求出 V 的实维数.

题 14. 考虑极小多项式为 $x^2 - x + 1$ 的四阶方阵 $A \in M_4(\mathbb{F}_3)$. 求这样的 A 的相似类有多少个? 对每一个相似类里的矩阵 A，求出这样的矩阵的个数.

题 15. 假设 F 是一个域, 考虑 $A \in M_n(F)$ 且 A 的特征多项式在 $F[x]$ 中不可约. 证明所有和 A 交换的 F-方阵都是 A 的多项式.