线性代数 作业 19

2025 年 9 月 11 日

说明：晚自习请独立完成一部分作业并上交，鼓励大家独立完成更多。剩余带回家继续完成。请将答案写在答题纸上，不要写在试卷上，答题纸上交，试卷可以带走。

完成度不好的作业题，需要重写解答。助教会在批改之后标记需要重写的题号。

1 晚自习完成的题目

我们将实线性空间的正定双线性型称为内积，其中 $\mathbb{R}^n$ 的标准内积定义为 $g(u,v) = \langle u, v\rangle = u^T v$.

题 1. *求 $\mathbb{R}^4$(配标准内积) 中，下列向量组生成的子空间 W 的正交补 $W^\perp$ 的一组基.*

1. $\{(1,0,2,1),(2,1,2,3),(0,1,-2,1)\}$;
2. $\{(1,1,1,1),(-1,1,-1,1),(2,0,2,0)\}$.

题 2. *设 V 是二乘二实矩阵组成的线性空间，定义 V 上的双线性型*

$$g(X,Y) = \operatorname{tr}(XY).$$

1. *证明 g 是对称双线性型.*
2. *对于 V 的一组基*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

求 g 在这组基下的 Gram 矩阵.

3. 求 g 的正、负惯性指标 p, q.

题 3. 对以下的对称实矩阵 A，找到可逆矩阵 P，使得 P^TAP 是对角线元素取自 $\{1,-1,0\}$ 的对角矩阵.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

题 4. 假设 V 是关于 x 的次数小于或等于 3 次的实系数多项式组成的实线性空间. 定义 V 上的对称双线性型为 $B(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)x\,dx$. 求 B 的符号 *(正负惯性指数)*.

题 5. 定义 $M_n(\mathbb{R})$ 上的一个对称双线性型

$$g(X,Y) = \mathrm{tr}(X^TY).$$

证明这个双线性型是正定的.

题 6. 定义 $M_n(\mathbb{R})$ 上的一个对称双线性型

$$g(X,Y) = \mathrm{tr}(XY).$$

求这个双线性型的正、负惯性指标.

2 可以带回家做的题目

题 7. 计算下列对称矩阵 A 的符号 (p,q,r)，需要过程*:*

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$;

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$;

3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

题 8. 记 $R_n = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ 为全体次数不超过 n 的多项式构成的线性空间，其上配有内积

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

- 称形如 $P_0(x) = 1, P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}[(x^2-1)^k], k = 1, 2, \cdots, n$ 的多项式为 *Legendre* 多项式. 证明 $P_0, P_1, \cdots, P_n$ 构成 R_n 的一组正交基.
- 设 f 是次数为 n 的首一多项式，求 f 长度 *(*即 $\sqrt{(f,f)}$*)* 的最小值.

题 9. 请分类 $\mathbb{C}$ 上有限维线性空间上的对称双线性型。或者等价的，分类 $\mathbb{C}$ 上的 n 阶对称矩阵的相合类（合同类）。

题 10. 设实对称矩阵 $S = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$. 证明

- $Sx = \lambda x$ 当且仅当 $x = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$, 满足 $Az = \lambda y, A^T y = \lambda z$.
- 如果 λ 是 S 的特征值，则 $-\lambda$ 也是 S 的特征值.
- 如果 $\lambda \neq 0$ 是 S 的特征值，则 λ^2 是 $A^T A$ 的特征值，也是 AA^T 的特征值.
- AA^T 和 $A^T A$ 的非零特征值相同，且有相同的重数.