线性代数 作业 2

2025 年 2 月 20 日

这次作业里所有矩阵不加说明都是实数矩阵.

1 基础题

本部分题必做.

题 1. *把下列矩阵化为最简行阶梯型: (默认空格处为 0)*

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

题 2. 考虑一个连通无向无圈无多重边的有限图 G. 假设 V 是顶点的集合, 其中只有一条边相连的顶点称为边界点，有多条边相连的顶点称为内部点. 假设内部点和边界点的集合都非空。对每一个顶点 i 取一个温度 $T_i \in \mathbb{R}$, 称 $T = (T_i)_{i \in V}$ 是一个图上的温度分布. 如果每一个内部点的温度等于与之相连的点的温度的平均值，则称这一分布称为稳定的的. 证明：对于每一组边界点的温度值，存在唯一的内部点的温度取值，使得这一温度分布是稳定的.

题 3. 将下列问题转化为求解线性方程组的问题, 并求解:

1. 设 2×2 矩阵 A 满足 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ 且 A 的第一列元素之和为 2, 求所有可能的 A.
2. 空间中有一个平面经过点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求所有与该平面垂直的向量.
3. 写出通过 5 点 $M_1(0,1), M_2(2,0), M_3(-2,0), M_4(1,-1), M_5(-1,-1)$ 的二次曲线的方程. 这里二次曲线是 xy-平面上形如 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 的方程决定的曲线.

题 4. 若 A, C 均为 $m \times n$ 矩阵, 如果对任何 b, 线性方程组 $Ax = b$ 与 $Cx = b$ 都有相同的解集, 是否一定有 $A = C$?

2 思考题

本部分题选做，学期中任何时间都可以交，不计成绩。

题 5. （还没讲到，2 月 25 日课会讲）课上我们研究过 $G(m,n)$ 的分解中 $\mathbb{R}^i$ 的个数, 记为 b_i.

1. 求 b_i 的生成函数 $\sum_i b_i t^i$.

2. 验证 $b_i = b_{m(n-m)-i}$.

3. 任取一组正实数 m, n, 验证 b_i 是单峰的 *(*先单调递增后单调递减*)*.

题 6. 若 A, A' 均为 $m \times n$ 矩阵, b, b' 为 m 维向量, 方程 $Ax = b$ 与 $A'x = b'$ 的解集相同且非空, 请思考 (A', b') 是否一定可由 (A, b) 经过行变换得到, 你能对 $m = n = 2$ 写出证明吗？