线性代数 作业 20

2025 年 10 月 10 日

说明：晚自习请独立完成一部分作业并上交，鼓励大家独立完成更多。剩余带回家继续完成。请将答案写在答题纸上，不要写在试卷上，答题纸上交，试卷可以带走。

完成度不好的作业题，需要重写解答。助教会在批改之后标记需要重写的题号。

请写下必要的解答过程以及理由，直接写答案的题目会被扣分。

1 晚自习完成的题目

题 1. 假设 V 是关于 x 的次数小于或等于 2 次的实系数多项式组成的实线性空间. 定义 V 上的对称双线性型为 $B(f,g)=\int_{-1}^{1}x^2 f(x)g(x)x\,dx$. 证明 B 是正定的, 并用 *Gram-Schmidt* 正交化和基 $1,x,x^2$ 求出一组标准正交基.

题 2. 证明二阶对称实方阵 A 是正定的当且仅当其迹和行列式同时大于零.

题 3. 证明如果 A 是正定实对称矩阵, 则 A 的伴随矩阵也是正定对称实矩阵. 反之是否成立呢？

题 4. 请判断以下结论是否成立，并说明理由.

1. 如果 A 是半正定实矩阵，则 A 的所有主子式都非负.
2. 如果 A 的所有顺序主子式非负，则 A 是半正定实矩阵.
3. 如果 A 的所有主子式（第 $i_1,\cdots,i_r$ 行，第 $i_1,\cdots,i_r$ 列组成的子矩阵的行列式）非负，则 A 是半正定实矩阵.

题 5. 假设 A 是正定实对称矩阵，B 是实对称矩阵，证明存在实数 c 使得 $cA+B$ 是正定矩阵.

题 6. 假设 A 是一个半正定的实对称矩阵，证明对 $x \in \mathbb{R}^n$, $x^T Ax = 0$ 等价于 $Ax = 0$

2 可以带回家做的题目

题 7. 证明 n 阶希尔伯特矩阵 $H_n = (\frac{1}{i+j-1})_{n\times n}$ 是正定矩阵. *(提示：对于小于或等于 $n-1$ 次的实系数多项式组成的实线性空间 V, 定义 V 上的双线性型 $B(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.)*

题 8. 设实对称方阵 A 的对角线元素都是 2, 两条次对角线上的元素都是 -1, 其余矩阵元是 0. 证明 A 正定.

题 9. 对所有满足 $v_0^2 - v_1^2 - \cdots - v_n^2 > 0, w_0^2 - w_1^2 - \cdots - w_n^2 > 0$ 的 $v = (v_0, v_1, \ldots, v_n), w = (w_0, w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$，证明如下不等式

$$(v_0^2 - v_1^2 - \cdots - v_n^2)(w_0^2 - w_1^2 - \cdots - w_n^2) \le (v_0 w_0 - v_1 w_1 - \cdots - v_n w_n)^2$$

并指出等号成立的充要条件. 提示:考虑线性空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上双线性型 $B(v,w) = v_0 w_0 - v_1 w_1 - \cdots - v_n w_n$. 对于 $n = 1$ 证明，然后对一般的 n 考虑 v 和 w 张成的子空间以及 B 的限制的正负惯性指数.