线性代数 作业 21

2025 年 10 月 10 日

说明：晚自习请独立完成一部分作业并上交，鼓励大家独立完成更多。剩余带回家继续完成。请将答案写在答题纸上，不要写在试卷上，答题纸上交，试卷可以带走。

完成度不好的作业题，需要重写解答。助教会在批改之后标记需要重写的题号。

请写下必要的解答过程以及理由，直接写答案的题目会被扣分。

1 晚自习完成的题目

题 1. 求如下矩阵 A 的 QR 分解

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

题 2. 设实对称矩阵 A 满足 $A^5 = I_n$, 证明 $A = I_n$.

题 3. 假设 A 和 B 是 n 阶正定实对称方阵，证明 $\det(A+B) > \det(A)$.

题 4. 假设 A 和 B 是 n-阶实对称矩阵，且 A 正定，证明存在可逆实矩阵 P 使得 P^TAP 和 P^TBP 均为对角矩阵.

题 5. 假设 A 是实对称矩阵，证明 A 正定当且仅当 A 的特征值均为正实数.

题 6. 假设 A 是正定实对称矩阵，证明存在唯一的正定实对称矩阵 B 使得 $B^2 = A$.

题 7. 考虑 $m \times n$ 实矩阵组成的线性空间 $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 和内积 $g(A,B) = \operatorname{tr}(A^T B)$. 假设 P 和 Q 分别为 m 阶和 n 正交实矩阵, 证明 $T_{P,Q}(A) = PAQ$ 定义了一个 V 上的正交变换.

题 8. 假设 A 是 n-阶反对称矩阵，证明存在正交矩阵 Q 使得

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_1 & & & & \\ \lambda_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -\lambda_2 & & \\ & & \lambda_2 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \geq 0$.

2 可以带回家做的题目

题 9. 对内积空间 V 中的子空间 W，有正交补 $W^\perp$, 且 $V = W \oplus W^\perp$，因此任意 $v \in V$ 有唯一的分解 $v = v_1 + v_2$，其中 $v_1 \in W, v_2 \in W^\perp$. 定义线性变换 $\operatorname{Proj}_W \colon v \mapsto v_1$ 为到 W 的投影映射. 证明 Proj_W 是自伴随变换.

题 10. 定义内积空间 E 中任意两个子集 X, Y 之间的距离为

$$\operatorname{dist}(X,Y) = \inf\{|x-y| \mid x \in X, y \in Y\}.$$

对 E 中的向量 v 和子空间 W, 证明

$$\operatorname{dist}(\{v\}, W) = |v - \operatorname{Proj}_W(v)|.$$

题 11 (Courant-Fischer-Weyl min-max principle)**.** 设 $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个 n 维实内积空间. 假设 T 是 E 的一个自伴随变换，有实特征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. 证明 T 的特征值可以由如下的 *Min-Max* 方法给出.

$$\lambda_k = \min\left\{\max\left\{\langle T(x), x\rangle : x \perp W_k, |x| = 1\right\} : W_k \subset E \text{ 子空间}, \dim W_k = k-1\right\}$$

这里先固定 $k-1$ 维子空间 W_k，取出对应的最大值

$$\max\left\{\langle T(x), x\rangle : x \perp W_k, |x| = 1\right\}.$$

然后让 W_k 取遍 $k-1$ 维子空间，取出这些值中的最小值。

或者可以证明如下特殊情形：设 A 为 n 阶实对称矩阵，v 为任意 n 维实列向量，且 $|v|$ 表示在标准内积下的向量长度。设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的全体特征值，求证：

$$|Av| \leq \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots, |\lambda_n|\}|v|.$$

题 12 (柯西交错定理)**.** 设 A 为一个 $n \times n$ 的实对称矩阵，B 为 A 的一个 $m \times m$ 阶主子矩阵，其中 $m < n$。若 A 的特征值为 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$，$B$ 的特征值为 $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_m$，则对所有 $1 \leqslant i \leqslant m$，有

$$\lambda_i \geqslant \mu_i \geqslant \lambda_{i+n-m}.$$

(提示：使用前面的 *Courant-Fischer-Weyl* 极小极大原理)

题 13 (Sylvester 判则)**.** 利用柯西交错定理证明西尔维斯特判则：一个对称矩阵是正定的，当且仅当其所有顺序主子式均为正。