线性代数 作业 22

2025 年 10 月 10 日

说明：请大家带回家完成。

请写下必要的解答过程以及理由，直接写答案的题目会被扣分。

1 思考题

题 1. 对任意矩阵 A，定义 $\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}(A^T A)}$. 设 A 为 n 阶实对称矩阵，v 为任意 n 维非零实列向量。求证：

$$\|A\|^2 \geq \frac{2n-1}{2(n-1)} \cdot \frac{\|Av\|^2}{\|v\|^2} - \frac{1}{n-1}(\mathrm{tr}A)^2.$$

题 2. 假设 V 是一个 n 维内积空间，带有正定对称双线性型 $\langle \cdot, \cdot \rangle$. 取 T 是 V 上的自伴随变换.

1. 对于 V 的子空间 W，以及 W 的标准正交基 $v_1, \cdots, v_k$, 考虑数

   $$\sum_{i=1}^{k} \langle v_i, T(v_i) \rangle$$

   证明这个数只依赖于 W 和 T, 而不依赖于标准正交基的选取. 我们记为广义迹 $\mathrm{tr}(T|_W)$. *(注意 W 不一定是 T 的不变子空间.)*

2. 假设 T 的 n 个特征值是 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_n$，对任意 $1 \leq k \leq n$, 证明

   $$\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = \max_{\dim(W)=k, W\text{是 } V \text{ 的子空间}} \mathrm{tr}(T|_W)$$

题 3. 记 n 阶反对称实矩阵组成的线性空间为 V.

1. 任意 $A \in V$，证明 $I + A$ 可逆.

2. 任意 $A \in V$, 定义 $f(A) = (I - A)(I + A)^{-1}$. 证明 $f(A)$ 是正交矩阵.

3. 请给出 $f\colon V \to \mathrm{O}(n)$ 的像集的关于特征值的一个刻画, 即哪些矩阵可以写成 $(I - A)(I + A)^{-1}, A \in V$ 的形式.