

线性代数 作业 24

2025 年 10 月 22 日

说明：请大家带回家完成。

请写下必要的解答过程以及理由，直接写答案的题目会被扣分。

1 思考题

题 1. 假设 V 实 n 阶实对称阵组成的实线性空间，在 V 上定义 *Frobenius* 内积 $(A, B) = \text{tr}(AB)$

1. 求出 V 的一组标准正交基

2. 设 B 是 n 阶实矩阵，定义 $f(A) = B^T AB$ ，则是 V 上的线性变换. 求证： f 是自伴随算子的充分必要条件是 B 为对称阵或反对称阵.

题 2. 设 A 为 n 阶实方阵， $A^T A$ 的全体特征值为 $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ ，其中 $0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$. 证明：

$$|I_n - A| \geq (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \cdots (1 - \lambda_n)$$

题 3. 设 A 为 $m \times n$ 实矩阵，则存在唯一的 $n \times m$ 实矩阵 A^\dagger ，满足以下条件： $AA^\dagger A = A$ ； $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$ ； AA^\dagger 和 $A^\dagger A$ 都是实对称矩阵。上述矩阵 A^\dagger 称为 A 的 *Moore-Penrose* 广义逆。特别地， A 是方阵时，这就是通常的逆矩阵。