线性代数 作业 3

2025 年 2 月 25 日

1 基础题

本次作业中的矩阵均为实矩阵.

题 1. 计算矩阵乘法:

1. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 9 \\ -3 & 3 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 9 & -2 & 0 \\ 11 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

2. $\begin{bmatrix} X & 1 & 0 \\ X^2+X & 2 & 0 \\ 0 & X & X-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & X & -X \\ 8 & -X-2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$ $(\theta, \varphi \in \mathbb{R})$.

4. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^6$. (为什么?)

题 2. 设矩阵 A, B 的行数相等. 证明: 存在矩阵 X 使得 $AX = B$ 当且仅当 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}((A, B))$. (其中 (A, B) 表示将两个矩阵拼接得到的矩阵.)

题 3. 设有 n 个矩阵 $A^{(1)}, \cdots, A^{(n)}$(注意, 此处上标不是乘方), 其大小未知, 但满足乘积 $P = A^{(1)}A^{(2)}\cdots A^{(n)}$ 有意义. 记 $A^{(k)}$ 的第 i 行第 j 个元素为 $a_{ij}^{(k)}$, P 的第 i 行第 j 个元素为 p_{ij}. 请用 $a_{ij}^{(k)}$ 表示 p_{ij}.

提示: 答案并不复杂. $n=2$ 时的答案为

$$p_{ij}=\sum_k a_{ik}^{(1)}a_{kj}^{(2)}.$$

题 4. 设 $G=(V,E)$ 是一个图, 顶点集 $V=\{1,2,\cdots,n\}$. n 阶矩阵 A 是 G 的邻接矩阵, 即 A 的元素 a_{ij} 等于顶点 i, j 之间边的数量.

证明 A^k 的第 i 行第 j 个元素等于 i, j 之间长度为 k 的道路的数量. (所谓 i,j 之间长度为 k 的道路, 是指 V 的一列元素 $i=v_0,v_1,\cdots,v_k=j$ 和 E 的一列元素 $e_1,\cdots,e_k$, 满足 e_h 的顶点为 v_{h-1},v_h.)

提示: 使用问题 3的结果.

题 5. 证明: 与所有 n 阶方阵均可交换的 n 阶方阵必为纯量方阵, 即形如 $\lambda I_n,\lambda\in\mathbb{R}$.

题 6. 对 $n\times n$ 矩阵 $X=(x_{ij})_{1\le i,j\le n}$, 定义其 "迹" 为

$$\mathrm{tr}(X)=x_{11}+x_{22}+\cdots+x_{nn}.$$

1. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times m$ 矩阵, 证明 $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$.
2. 证明不存在 $n\times n$ 的矩阵 A,B 使得 $AB-BA=I_n$.