线性代数 作业 4

2025 年 2 月 27 日

1 基础题

本部分题必做.

题 1. 考虑如下 2 阶方阵的集合 $M = \{A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

1. 请证明 M 在矩阵的加法, 数乘和乘法下封闭.
2. 请证明 M 上的乘法满足交换律, 而且 M 中的任何非零矩阵均可逆, 且逆矩阵也在 M 中.

题 2. 计算如下矩阵的逆矩阵:

1. $\begin{bmatrix} 1 & a & z \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;
2. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, ad - bc \neq 0$;
3. $\begin{bmatrix} 17 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \end{bmatrix}$. 利用你计算的结果解方程 $\begin{bmatrix} 17 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 36 \\ 0 \end{bmatrix}$.

题 3. 回顾第一次课里介绍的 *Google* 的 *PageRank* 算法. 对任意一个有向图 G, 其对应的线性方程组是否一定有非零解?

提示: 这个方程可以表示为 $Ax = 0$, A 是某个方阵. 考虑 A^T 以及方程 $A^T y = 0$.

题 4. 证明线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解当且仅当 $\begin{bmatrix} A^T \\ \mathbf{b}^T \end{bmatrix}\mathbf{y}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$ 无解.

题 5. 令 $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ 为 n 阶实矩阵。证明若 $\forall 1\leq i\leq n$, $|a_{ii}|>\Sigma_{j\neq i}|a_{ij}|$, 则 A 可逆.

提示：利用 $Ax=0$ 是否有非零解的判定法则.

题 6. 证明 $n\times m$ 的实矩阵 A 的 *rank* 小于或等于 1 等价于存在 n 维列向量 α 和 m 维列向量 β 使得 $A=\alpha\cdot\beta^T$.

2 思考题, 不用交

题 7. 设 $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ 是一个可逆方阵. A 的一个 LDU 分解指 $A=LDU$, 其中 L 是一个主对角线均为 1 的下三角矩阵, U 是一个主对角线均为 1 的上三角矩阵, D 是一个可逆的对角矩阵. 记 $A_m=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$. 证明,$A$ 存在 LDU 分解当且仅当对每个 $1\leq m\leq n$, A_m 都可逆, 并且当 A 存在 LDU 分解时, 其 LDU 分解是唯一的. (注：这 A_m 称做 A 的顺序主子阵。请用这个结论说服自己,"大部分"实矩阵都具有 LDU 分解，思考如何来定义"大部分".)

题 8. 令 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 是域 $\mathbb{R}$ 上的 n-阶可逆矩阵全体, B 是上三角矩阵全体. 记 S_n 是每行每列有且仅有一个 1 的 n-矩阵全体. 对任意 $w\in S_n$, 定义 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的子集为

$$BwB=\{A_1\cdot w\cdot A_2 \mid A_1\in B, A_2\in B\}.$$

证明 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 是所有 BwB 的无交并.

题 9. 称 n 阶实方阵 A 是幂零矩阵，如果 $A^k=0$ 对某个正整数 k 成立. 证明

1. 若 A 是 n 阶幂零矩阵, 则 $I+A$ 可逆.
2. 假设 $I-X$ 是 n 阶幂零方阵, B 是 n 阶实方阵，且 $X^mB=BX^m$ 对某一个正整数 m 成立. 请问是否一定有 $XB=BX$ 成立？如果是请证明，如果不是请给出反例.