线性代数 作业 5

2025 年 3 月 4 日

1 基础题

本部分题必做.

题 1. 假设 A 是可逆矩阵，u, v 是列向量。证明：

1. $A + uv^T$ 可逆当且仅当 $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$。
2. $A + uv^T$ 可逆时有 $(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1+v^T A^{-1}u}$

题 2. 求下述 n 阶矩阵的逆:

$$\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{pmatrix}$$

(其中 $a_i \neq 0$.)

题 3. 假设 $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R}), B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. 证明 $I_n + AB$ 可逆当且仅当 $I_m + BA$ 可逆.

题 4. 设 A, B 为 $2^n \times 2^n$ 矩阵，我们想要计算乘积 $C = AB$。根据维基百科，"*Strassen* 算法将 A, B 和 C 分割成大小相等的块矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix},$$

其中 $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathrm{M}_{2^{n-1}\times 2^{n-1}}(\mathbb{R})$。朴素算法如下：

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}\times B_{11} + A_{12}\times B_{21} & A_{11}\times B_{12} + A_{12}\times B_{22} \\ A_{21}\times B_{11} + A_{22}\times B_{21} & A_{21}\times B_{12} + A_{22}\times B_{22} \end{bmatrix}$$

这种构造并没有减少乘法的数量：仍然需要 *8* 次矩阵块的乘法来计算 C_{ij} 矩阵，这与使用标准矩阵乘法所需的乘法数量相同。*Strassen* 算法定义了新的值：

$$\begin{aligned}
M_1 &= (A_{11} + A_{22}) \times (B_{11} + B_{22})\,; \\
M_2 &= (A_{21} + A_{22}) \times B_{11}; \\
M_3 &= A_{11} \times (B_{12} - B_{22})\,; \\
M_4 &= A_{22} \times (B_{21} - B_{11})\,; \\
M_5 &= (A_{11} + A_{12}) \times B_{22}; \\
M_6 &= (A_{21} - A_{11}) \times (B_{11} + B_{12})\,; \\
M_7 &= (A_{12} - A_{22}) \times (B_{21} + B_{22})\,,
\end{aligned}$$

使用 *7* 次乘法（每个 M_k 一次）而不是 *8* 次。现在我们可以用 M_k 来表达 C_{ij}：

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 + M_4 - M_5 + M_7 & M_3 + M_5 \\ M_2 + M_4 & M_1 - M_2 + M_3 + M_6 \end{bmatrix}$$

”递归地这样做，比较朴素算法和 *Strassen* 算法需要的两个数乘法的次数。让自己相信 *Strassen* 算法更高效。(还有一个更快的算法，由 *Coppersmith-Winograd* 提出)。

2 思考题，不用交

题 5. 设 A, B 是 $\mathbb{R}$ 上的 $m \times n$ 矩阵，$\operatorname{rank}(A) = r, \operatorname{rank}(B) = s$，并且 $\operatorname{rank}(A+B) = r+s$ 证明：存在 m 阶可逆矩阵 P 与 n 阶可逆矩阵 Q 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \quad PBQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$