# 线性代数 作业 6

2025 年 3 月 6 日

**题 1.** 如下归纳地定义方阵

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & I \\ I & -A_{n-1} \end{bmatrix}$$

. 求 $A_n$ 的平方 $(A_n)^2$.

**题 2.** 请判断以下向量组是否线性无关，并找出下述向量组生成的子空间的一组数目最少的生成元.

1. $a_1 = (1,2,3), a_2 = (3,6,7)$;
2. $a_1 = (2,-3,1), a_2 = (3,-1,5), a_3 = (1,-4,3)$;
3. $a_1 = (4,-5,2,6), a_2 = (2,-2,1,3), a_3 = (6,-3,3,9), a_4 = (4,-1,5,6)$;
4. $a_1 = (1,0,0,2,5), a_2 = (0,1,0,3,4), a_3 = (0,0,1,4,7), a_4 = (2,-3,4,11,12)$.

**题 3.** 请将 $Span_{\mathbb{R}}(v_1, v_2)$ 写成某个矩阵的 *kernel.* 其中 $v_1 = (1,2,3,4)^T$ *and* $v_2 = (5,6,7,8)^T$.

**题 4.** 令 $S = \{v \in \mathbb{R}^3 : v = (r-2s, 3r+s, s)^T, r, s \in \mathbb{R}\}$.

1. 请验证 $S$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.
2. 证明 $S$ 是平面 $3x - y + 7z = 0$.

**题 5.** 判断以下集合和运算是否构成 $\mathbb{R}$-线性空间.

1. $n$-阶实对称矩阵 $A = A^T$ 全体，在矩阵的加法和数乘下.
2. $n$-阶实反对称矩阵 $A = -A^T$ 全体，在矩阵的加法和数乘下.

*3.* 满足 $p(1) = p(2)$ 的所有实系数多项式，在通常多项式的加法和数乘下.

*4.* 秩小于或等于 1 的三阶方阵全体，在矩阵的加法和数乘下.

*5.* 在实轴上定义的周期等于 1 的全体实值函数，在通常函数的加法和数乘下.

*6.* $\mathbb{R}^2$ 中满足方程 $x^2 = y^2$ 的点集，在 $\mathbb{R}^2$ 的加法和数乘下.

*7.* 实轴上的光滑函数，满足 $f'(t) + f(t) = \cos t$，在通常函数的加法和数乘下.

**题 6.** *1.* 请举出 $\mathbb{R}^2$ 中满足加法封闭，但是数乘不封闭的非空集合的例子.

*2.* 请举出 $\mathbb{R}^2$ 中满足数乘封闭，但是加法不封闭的非空集合的例子.

**题 7.** 在 $\mathbb{R}$-线性空间 $V$ 中，

*1.* 验证对任意 $v \in V$, $-1 \cdot v = -v$.

*2.* 验证对任意 $c \in F$, $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$, 这里 $\mathbf{0}$ 指的是 $V$ 中的加法单位元.

**题 8.** 固定某个向量 $w \in \mathbb{R}^n$. 对于 $a \in \mathbb{R}$ *and* $u \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$a \otimes u = a(u - w) + w.$$
$$u \oplus v = u + v - w.$$

请判断并证明 $V = \mathbb{R}^n$ 在数乘 $\otimes$ 和加法 $\oplus$ 下是否做成 $\mathbb{R}$ 线性空间. 如果是，其中零向量是什么？*(Note:* 我们用记号 $\otimes$ *and* $\oplus$ 来和 $\mathbb{R}^n$ 上的通常加法和数乘做区分*).*