线性代数 作业 7

2025 年 3 月 11 日

题 1. 决定以下向量组是否组成 $\mathbb{R}^3$ 的基.
$$\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}.$$

题 2. 判定以下 $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ 中的向量组是否线性无关:
$$A_1=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}2&-1\\0&1\end{bmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix}3&6\\0&1\end{bmatrix}.$$

题 3. $C^\infty(\mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$ 上的光滑函数) 是 (无穷维) $\mathbb{R}$-线性空间. 证明, 函数
$$\sin(t),\sin(2t),\cdots,\sin(Nt)$$
线性无关.

题 4. 如果矩阵 $A=A^T$, 则称 A 是对称矩阵. 如果 $A=-A^T$, 则称 A 是反对称矩阵. 分别证明对称矩阵和反对称矩阵构成 $M_n(\mathbb{R})$ 的子空间, 计算这两个子空间的维数.

题 5. 记 $V=C^\infty(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数组成的 $\mathbb{R}$ 线性空间. 验证两组元素 B,C 满足 $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}B=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}C=W$, 且 B,C 均为 W 的基.

1. $B=(1,\cos x,\cos 2x,\cos 3x)$, $C=(1,\cos x,\cos^2 x,\cos^3 x)$.
2. $B=(1,x,x^2,x^3)$, $C=(1,x-a,(x-a)^2,(x-a)^3)$ ($a\in\mathbb{R}$ 为常数)

题 6. 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上有限维向量空间, $W_1,W_2,\cdots,W_n$ 是 V 的真子空间, 证明:
$$W_1\cup W_2\cup\cdots\cup W_n\neq V.$$

题 7. 考虑 *“Shifted Legendre polynomial”*

$$\widetilde{P}_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - x)^n$$

证明 $\widetilde{P}_0, \widetilde{P}_1, \cdots$ 构成 $\mathbb{R}[x]$ 的一组基.