线性代数 作业 8

2025 年 3 月 18 日

题 1. 记 $V = C^\infty(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数组成的 $\mathbb{R}$ 线性空间. 第七次作业中，我们验证了两组元素 B, C 满足 $\operatorname{Span}_\mathbb{R} B = \operatorname{Span}_\mathbb{R} C = W$, 且 B, C 均为 W 的基. 请写出 B, C 的转换矩阵 $P_{B\leftarrow C}$ 和 $P_{C\leftarrow B}$.

1. $B = (1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x)$, $C = (1, \cos x, \cos^2 x, \cos^3 x)$.
2. $B = (1, x, x^2, x^3)$, $C = (1, x-a, (x-a)^2, (x-a)^3)$ ($a \in \mathbb{R}$ 为常数)

题 2. *Consider the linear map:* $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *such that* $(x_1, x_2, x_3)^T \mapsto (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2)^T$. *Compute the matrix of* T *with respect to the basis* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *of* $\mathbb{R}^3$ *and* β_1, β_2 *of* $\mathbb{R}^2$*:*

1. $\alpha_1 = (1,0,0)^T, \alpha_2 = (0,1,0)^T, \alpha_3 = (0,0,1)^T, \beta_1 = (1,0)^T, \beta_2 = (0,1)^T$
2. $\alpha_1 = (1,1,1)^T, \alpha_2 = (0,1,1)^T, \alpha_3 = (0,0,1)^T, \beta_1 = (1,1)^T, \beta_2 = (1,0)^T$
3. $\alpha_1 = (1,2,3)^T, \alpha_2 = (0,1,-1)^T, \alpha_3 = (-1,-2,3)^T, \beta_1 = (1,2)^T, \beta_2 = (2,1)^T$

考虑线性映射：$F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$，使得 $(x_1, x_2, x_3)^T \mapsto (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2)^T$。计算 T 关于 $\mathbb{R}^3$ 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 $\mathbb{R}^2$ 的基 β_1, β_2 的矩阵：

1. $\alpha_1 = (1,0,0)^T, \alpha_2 = (0,1,0)^T, \alpha_3 = (0,0,1)^T, \beta_1 = (1,0)^T, \beta_2 = (0,1)^T$
2. $\alpha_1 = (1,1,1)^T, \alpha_2 = (0,1,1)^T, \alpha_3 = (0,0,1)^T, \beta_1 = (1,1)^T, \beta_2 = (1,0)^T$

3. $\alpha_1 = (1,2,3)^T, \alpha_2 = (0,1,-1)^T, \alpha_3 = (-1,-2,3)^T, \beta_1 = (1,2)^T, \beta_2 = (2,1)^T$

题 3. 令 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

1. 证明和 B 交换的矩阵 A 的集合 $W = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | AB = BA\}$ 是实线性空间 $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ 的子空间.

2. 找到 W 的一组基.

题 4. 对于 $A \in M_n(\mathbb{R})$，证明 $A \cdot A^T$ 的列空间和 A 的列空间相同.

题 5. 令 V 是形如 $AB - BA$ 的矩阵生成的 $M_n(\mathbb{C})$ 的子空间. 证明 $V = \{A \mid Trace(A) = 0\}$.

题 6. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. 考虑线性映射 $f\colon M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ 满足对 $B \in M_3(\mathbb{R})$ 有 $f(B) = A \cdot B$.

1. 求 A 的（行）最简阶梯型。

2. 求 $\mathrm{Ker}(f)$ 作为实线性空间的一组基。

3. 求 $\mathrm{Im}(f)$ 作为实线性空间的一组基。

题 7. 假设 V 是实线性空间 $\mathbb{R}[x]$，考虑两个线性映射 $T_1, T_2\colon V \to V$，使得 $T_1(f) = f'$ 和 $T_2(f) = xf$. 证明 $T_1 \circ T_2 - T_2 \circ T_1 = Identity$. 请问在有限维线性空间 V 中是否存在这样的线性映射？