线性代数 期中考试

2025 年 4 月 23 日下午两点到四点

试卷一共两页，六道大题，每道题的分数在题目中给出。考试时间为两小时，满分 100 分。请在答题纸上写上你的学号和姓名。请在答题纸上写出必要的步骤和推理过程，只有结果不算完整答案。

题 1 (20 分)**.** *判断以下实矩阵是否可逆，并写出理由. 如果可逆，求出其逆矩阵.*

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 2-n & 1 & 1 & 1\cdots & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & 1\cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & 1\cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-n\cdots & 1 \\ & & \cdots & & \\ 1 & 1 & 1 & 1\cdots & 2-n \end{bmatrix}$ 是 $n \times n$ 的实矩阵.

题 2 (20 分)**.** 设 $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

(a) 求 A^T 的列空间 $C(A^T)$ 的一组基。

(b) 求 A 的零空间 $\ker(A)$ 的一组基。

(c) 证明 $C(A^T) \cap \ker(A) = \{\mathbf{0}\}$.

题 3 (15 分)**.** 设

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix}.$$

已知 $\det(A)=1$. 求方阵

$$\begin{bmatrix} 3x-3y & 3y & 3z \\ 2a-2b & 2b & 2c \\ u-v-4a+4b & v-4b & w-4c \end{bmatrix}$$

的行列式。

题 4 (15 分)**.** 设 V 是二阶实矩阵构成的实线性空间 V, A 可逆, $\operatorname{tr} A \neq 0$. 考虑 $T(X)=AX+XA$, 对于每个 $B\in V$, 是否存在唯一的 A 使得 $T(A)=B$。

题 5 (15 分)**.** 假设 A 是整系数的 $m\times n$ 的矩阵, b 是整系数的 m 维列向量, $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$ 是 n 维列向量. 记 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 是模 p 的同余类全体. 证明以下两个命题等价

1. 关于 n 个变元 $x_1,\cdots,x_n$ 的线性方程组 $Ax=b$ 有实数解 $x_i\in\mathbb{R}$.
2. 对除了有限个以外的其他所有素数 p, 同余方程组 $Ax\equiv b \mod p$ 均有解 $x_i\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

题 6 (15 分)**.** 假设 V 是一个有理数域上的有限维线性空间, $T\colon V\to V$ 是一个线性变换线性变换, 且在 V 的某组基下的表示矩阵是上三角阵. 设 W 是 T 的一个不变子空间。证明 $T|_W\colon W\to W$ 也在 W 某一组基下由一个上三角矩阵表示。