示范班线代，2025.9.10 (6~9) 高等线性代数

回顾：二次型与双线性型（参考书：张贤科 Chap 8）

域 $F=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. $F^{(n)}$: F上 n阶列向量空间

任何方阵 $A\in M(n\times n, F)$ 决定了函数：

$$b_A: F^{(n)}\times F^{(n)} \longrightarrow F,\quad (x,y)\longmapsto b_A(x,y):=x^TAy$$

这是 $F^{(n)}$ 上一个双线性型，即 b_A 关于 x,y 都是线性的：$b_A(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2, \mu_1y_1+\mu_2y_2)$

$$=\sum_{i,j=1}^{2}\lambda_i\mu_j\, b_A(x_i,y_j),\quad \forall\ x_i,y_j\in F^{(n)},\ \lambda_i,\mu_j\in F$$

当 A 对称时（$A=A^T$），b_A 也是对称的（即 $b_A(x,y)=b_A(y,x)$） A 称作 b_A 的 Gram 矩阵

一般地，对任意 F 上有限维线性空间 V，称 $b: V\times V\to F$ 为双线性的，若 $b(\sum\lambda_ix_i, \sum\mu_jy_j)=\sum\lambda_i\mu_j\, b(x_i,y_j)$ $\forall\cdots$

对称的，若 $b(x,y)=b(y,x)$，$\forall x,y\in V$.

设 $A\in M(n\times n, F)$ 对称. 设 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T\in F^{(n)}$

则 $Q(x)=x^TAx$ 称为 F 上 n 个变元 $x_1,\cdots,x_n$ 的二次型（quadratic form），也称为线性空间 $F^{(n)}$ 上的二次型

若 $A=(a_{ij})$，则 $Q(x)=(x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$=\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j .$$

所以 $Q(x)$ 本质上是关于 $x_1,\cdots,x_n$ 的二次多项式

反之，任何一个 n 元二次多项式 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i\le j} b_{ij}x_ix_j$

是一个来自于 $B=\begin{pmatrix} b_{11} & \frac{1}{2}b_{12} & \cdots & \frac{1}{2}b_{1n} \\ & b_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$ 的二次型.

对来自于一个$\overset{对称}{\wedge}$方阵 A 的双线型 $b: F^{(n)}\times F^{(n)}\to F$ 和

二次型 Q，有关系：$\begin{cases} Q(x)=b(x,x) \\ b(x,y)=\frac{1}{2}(Q(x+y)-Q(x)-Q(y)) \end{cases}$

所以 A, b, Q 中任一个决定另外两个.

Q 满足平行四边型法则. $Q(x+y)+Q(x-y)=2(Q(x)+Q(y))$

内蕴定义：V finite dim'l v.sp $/F$，$Q: V\to F$ 称作一个 V 上二次型，若 ① $Q(\lambda x)=\lambda^2 Q(x)$，$\forall \lambda\in F, x\in V$

② $b(x,y):=\frac{1}{2}(Q(x+y)-Q(x)-Q(y))$ 为 V 上一个对称双线性.

此时称 b 为 Q 诱导的双线性型

$Q_A(x_1,\cdots,x_n) = (x_1,\cdots,x_n)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 双线性型

P: $n\times n$ 可逆阵 $/F$

变量替换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$ $\qquad x = P\tilde{x}$

则 $Q_A(\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_n) = (P\tilde{x})^T A (P\tilde{x}) = \tilde{x}^T \underbrace{P^TAP}\, \tilde{x}$

定义: $B = P^TAP$, P 可逆, 则称 A 与 B 相合, 记 $A \simeq B$.

例: $Q(x) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$

$$Q(x) = a(\underbrace{x_1 + \frac{b}{a}x_2}_{\tilde{x}_1})^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)\underbrace{x_2}_{\tilde{x}_2}{}^2 = \tilde{x}^T \begin{pmatrix} a & \\ & c-\frac{b^2}{a} \end{pmatrix} \tilde{x}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & \cancel{c-\frac{b^2}{a}}\,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \tilde{x}_1 - \frac{b}{a}\tilde{x}_2 \\ x_2 = \tilde{x}_2 \end{cases} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$$

$$Q = x^T \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} x = \tilde{x}^T P^T \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} P\, \tilde{x}$$

$$\Rightarrow \quad P^T \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} a & \\ & c-\frac{b^2}{a} \end{pmatrix}$$

$a>0$, $\quad c - \frac{b^2}{a} > 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$

$\qquad\qquad = 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$

$\qquad\qquad < 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

更一般地，$Q(x) = Q(x_1, \cdots, x_n) = x^T A x$

配方过程（~）可逆阵 R，s.t. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

s.t. $Q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$

于是 $x^T A x = Q(x) = y^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} y = x^T R^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} R x$

二次型与对称阵一一对应，故这等价于说

$$A = R^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} R$$

令 $P = R^{-1}$ 则 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = P^T A P$.

所以把矩阵 A 相合对角化本质就是对应的二次型的配方.

(Sylvester 惯性定理). 设 A 为 $\mathbb{R}$ 上 $n\times n$ 对称阵，则存在 $P \in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $P^T A P = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$，其中 p, q 不依赖于 P 的选择. 称为 A 的正，负惯性指数，$p-q$ 称为 A 的符号差.

(特别的，$\mathbb{R}^{(n)}$ 上二次型 Q 可经坐标变换变成

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - \cancel{y_1^2 - \cdots - y_q^2}\ x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$$

对称双线性型可变作 $x_1 y_1 + \cdots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \cdots - x_{p+q} y_{p+q}$)

证明：存在性：从配方角度看，设 $Q(x)=x^TAx=\sum\limits_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_ix_j$

① 若 $a_{11}\neq 0$，则 $Q=a_{11}x_1^2+2(a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)x_1+\cdots$

$$=a_{11}\left(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2+R(x_2,\cdots,x_n)$$

其中 R 为关于 $x_2,\cdots,x_n$ 的二次型.

从矩阵角度：$\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots \\ \vdots & \ddots\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{初等变换}]{}\left(\begin{array}{c|c}a_{11} & 0\cdots 0\\ \hline 0 & \\ \vdots & \ddots \\ 0 & \end{array}\right)$

严格地，设 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & \alpha^T\\ \alpha & A_1\end{pmatrix}$，则令 $P=\begin{pmatrix}1 & -a_{11}^{-1}\alpha^T\\ & I_{n-1}\end{pmatrix}$

则 $P^TAP=\left(\begin{array}{c|c}a_{11} & 0\\ \hline 0 & B\end{array}\right)$　　$B=A_1-a_{11}^{-1}\alpha\alpha^T$.

② 若 $a_{11}=0$，$a_{jj}\neq 0$，$j>1$，则令 P_{ij} 为 I 对换第 $1,j$ 行得到的初等矩阵，于是 $P_{ij}^TAP_{ij}$ 的第一行第一列非零

③ 若对角线全为0，设某个矩阵元非零

$$\begin{pmatrix}0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0\end{pmatrix}$$
(ij) 元素.

两个初等变换将 a_{ii} 变非零.

综上，$\exists\, P\in GL_n(F)$，$P^TAP=\begin{pmatrix}1 & \\ & B\end{pmatrix}$. 再对 n 归纳即可

唯一性：(Witt 消去定理)：设 $A_1=\begin{pmatrix}R_1 & \\ & S_1\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}R_2 & \\ & S_2\end{pmatrix}$

为 F 上两个对称方阵，若在 F 上 $A_1\simeq A_2$，$R_1\simeq R_2$

则 $S_1\simeq S_2$.

应用 Witt 消去在 $F=\mathbb{R}$ 情形，可推出惯性定理中唯一性：假设 $\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} I_{p'} & & \\ & -I_{q'} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

秩相同 $\Rightarrow p+q=p'+q'$

若 $p>p'$，则由 Witt 消去 $\Rightarrow \begin{pmatrix} I_{p-p'} & \\ & -I_q \end{pmatrix} \simeq -I_{q'}$

$\Rightarrow \exists\ Q$ 可逆，$\begin{pmatrix} I_{p-p'} & \\ & -I_q \end{pmatrix} = -QQ^T$

但 $1=(1,0,\cdots)\begin{pmatrix} I_{p-p'} & \\ & -I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = -(1,0,\cdots)QQ^T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} < 0$

矛盾！

Witt 消去定理 / F char $\neq 2$ 均成立

证明参见 张贤科 §8.2，305 页.

我们复习一个惯性定理的"内蕴"证明.

$b: V\times V\to F$ 对称双线性型

$\underset{\substack{\parallel \\ \mathrm{Null}(V,b)}}{\mathrm{Null}(b)} := \{v\in V \mid b(v,w)=0,\ \forall w\in V\}$. 零空间

$\mathrm{Null}=0 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} b$ 非退化.

$V \longrightarrow V/\mathrm{Null}(b)$ 诱导 $\bar{b}: V/\mathrm{Null}\times V/\mathrm{Null}\to F$ 非退化.

任取 $\mathrm{Null}(V,b)$ 在 V 中补空间 W，则

$(W, b|_W) \xrightarrow{\ \sim\ } (V/\mathrm{Null},\ \bar{b})$ 同构

$V = (W, b|_W) \oplus (\mathrm{Null}, 0)$

对任 $W < V$，定义 $W^\perp = \{v \in V \mid b(v, W) = (0)\}$

引理：(V, b) 非退化，$W < V$，则以下等价：

① $V = W \oplus W^\perp$ ② $b|_W$ 非退化 ③ $b|_{W^\perp}$ 非退化

平行四边形法则 $\Rightarrow$ 若 $b \neq 0$，则 $\exists\, v \in V$，$b(v,v) \neq 0$

$(\Leftrightarrow)$ $b|_{Fv}$ 非退化 $\Leftrightarrow V = Fv \oplus (Fv)^\perp$.

定理（相合对角化）(V, b)，~~对称~~ 则 $\exists$ 正交基，i.e.

$v_1, \cdots, v_n$ basis of V，$b(v_i, v_j) = 0$，$i \neq j$.

证：前面从矩阵角度已证.

用更内蕴语言：① 约化到非退化

② 平行四边形法则 $\Rightarrow \exists\, v$，$b(v,v) \neq 0$

③ $V = Fv \oplus (Fv)^\perp$. ④ 对 $(Fv)^\perp$ 归纳.

记 Sylvester 惯性定理：$(V, b)/\mathbb{R}$，$\exists$ basis $\mathcal{B}$

$v_1, \cdots, v_p, v_{p+1}, \cdots, v_{p+q}, \cdots, v_n$, s.t. Gram 阵

$$G_{b,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$ （i.e. $\mathcal{B}$ is 正交基，且

$b(v_1, v_1) = \cdots = b(v_p, v_p) = 1$，$b(v_{p+1}, v_{p+1}) = \cdots = -1$，$b(v_{p+q+1}, v_{p+q+1})$
$= \cdots = 0$

唯一性：引入正定性概念.

定义：(V,b) 正定，若 $b(v,v)>0$，$\forall v\neq 0$ 记作 $b>0$
/$\mathbb{R}$

半正定 $\cdots\ \geq\ \cdots$. $b\geq 0$

负定，半负定 $\cdots$

正定，负定皆推出 b 非退化.

存在性定理 $\Rightarrow$ $V=\underset{p}{W_1}\oplus\underset{q}{W_2}\oplus W_3$，$b|_{W_1}>0$，$b|_{W_2}<0$

$b|_{W_3}=0$

若 $\exists$ $W<V$，$\dim W\geq p+1$，则 $W\cap(W_2\oplus W_3)\neq(0)$

$\Rightarrow$ $\exists$ $v\in W$，$v\neq 0$，$b(v,v)\leq 0$

所以 $p=\max\{\dim W \mid W<V,\ b|_W>0\}$

$q=\max\{\dim W \mid W<V,\ b|_W<0\}$.

所以 p,q 由 (V,b) 唯一确定，不依赖于正交基的选择.

下进一步探讨正定双线性型和正定矩阵，然后讨论内积.