示范班 2025.9.24

回顾：内积空间是 (V, g)，V 有限维/$\mathbb{R}$；g 正定

$e_1, \cdots, e_n$ 基，若 $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$，则叫标准正交基

Gram-Schmidt 正交化：任给 V 的基 $v_1, \cdots, v_n$

· $v_1 \longrightarrow v_1/|v_1|$　　· $v_2 \rightsquigarrow v_2 - g(v_1, v_2) v_1$

· $v_2 \rightsquigarrow v_2/|v_2|$　　· $v_3 \rightsquigarrow v_3 - g(v_1, v_3) v_1 - g(v_2, v_3) v_2$

… 可将 $(v_1, \cdots, v_n)$ 变成标准正交基.

定义. (V, g) $f: V \to V$，若 f 为线性同构且

$g(f(x), f(y)) = g(x, y)$, $\forall x, y \in V$，则称 f 为内积空间 (V, g) 的自同构，或称 f 为一个正交变换.

设 $B = (v_1, \cdots, v_n)$ 为 V 的一个标准正交基，

设 $f(v_1, \cdots, v_n) = (v_1, \cdots, v_n) A$

则 $(f(v_1) \cdots f(v_n)) \underset{g}{\cdot} \begin{pmatrix} f(v_1) \\ \vdots \\ f(v_n) \end{pmatrix} = I_n$

$$\Rightarrow I_n = A^T \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \underset{g}{\cdot} (v_1, \cdots, v_n) A = A^T A$$

定义：方阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 称作正交矩阵，若 $A^T A = I_n$.

性质：$A^T A = I_n \Leftrightarrow A A^T = I_n$.

性质. $A\in M_n(\mathbb{R})$ 正交阵 $\iff$ A 的列构成 $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的标准正交基 $\iff$ A 的行构成 $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的标准正交基.

性质. $A\in M_n(\mathbb{R})$ 既正交, 又上三角. 则 A 为对角阵, 且对角线元为 ± 1.

定理 (QR 分解). 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 可逆, 则存在分解

$A=QR$, Q 正交, R 上三角.

如果还要求 R 对角线元 >0, 则这样分解存在唯一.

证: A 的列构成 $\mathbb{R}^n$ 的一个基,

对 A 的列 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 作 Gram-Schmidt 正交化,

每一步相当于右乘一个初等阵, 必为上三角,

$\Rightarrow$ $A\cdot$(上三角阵) $= Q$ 正交

$\Rightarrow$ $A=QR$, Q 正交, R 上三角.

可调整使 R 对角线均 >0.

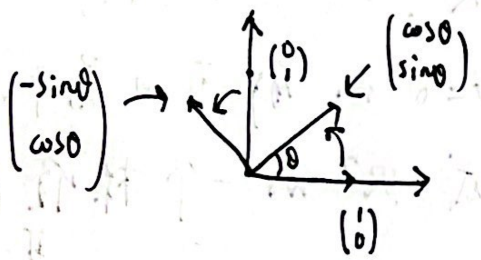
设这样的分解有两个 $A=Q_1R_1=Q_2R_2$

则 $\underbrace{Q_2^{-1}Q_1}_{\text{正交}} = \underbrace{R_2R_1^{-1}}_{\text{上三角, 对角线}>0}$ $\Rightarrow$ $Q_2^{-1}Q_1 = R_2R_1^{-1} = I_n$ □

性质: A, B 正交 $\Rightarrow$ AB 正交.

备注：可逆阵也可分解为 正交×下三角，上三角×正交，下三角×正交. 证明类似.

$n=2$ 例：共 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ +\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}$.



$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

逆时针旋转 θ.

性质：A 正交 $\Rightarrow \det A = \pm 1$. 且 ± 1 确实能取到.

$O_n(\mathbb{R}) := \{$所有 n 阶正交阵$\}$

$SO_n(\mathbb{R}) := \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$.

$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}$. 连通的.

定义：对 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$，若 $\exists\, Q \in O_n(\mathbb{R})$，$A = Q^T B Q$ $(= Q^{-1} B Q)$

则称 A, B 正交相似.

若 A 正交相似于一个对角阵，则称 A（在 $\mathbb{R}$ 上）可正交（相似）对角化.

定理：实对称方阵可正交对角化.

证：我们给两个证明，一个纯矩阵的，一个用双线性型（更好推广）.

设 $A\in M_n(\mathbb{R})$, $A=A^T$, 我们对 n 归纳.

先证 A 有一个实特征值.

设 $\lambda\in\mathbb{C}$ 为 A 的特征值, 设 $Av=\lambda v$. $0\neq v\in\mathbb{C}^n$

则 $\bar{v}^TAv=\lambda\bar{v}^Tv$, $\bar{v}^Tv>0$

$\overline{\bar{v}^TAv}^T=\bar{v}^TAv \Rightarrow \bar{v}^TAv\in\mathbb{R}$. 所以 $\lambda\in\mathbb{R}$.

$A-\lambda I$ 退化 $\Rightarrow$ v 作为 $(A-\lambda I)v=0$ 的解可以属于 $\mathbb{R}^n$

不妨 $\langle v,v\rangle=1$. 将 $v=v_1$ 扩充成 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基,

记作 $Q_1=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$

则 $AQ_1=(Av_1\ Av_2\cdots Av_n)=(\lambda v_1\ Av_2\cdots Av_n)$

$$=\underbrace{(v_1\cdots v_n)}_{Q_1}\left(\begin{array}{c|c}\lambda & * \\ \hline 0 & *\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A=Q_1\left(\begin{array}{c|c}\lambda & * \\ \hline & *\end{array}\right)Q_1^{-1}=Q_1\left(\begin{array}{c|c}\lambda & * \\ \hline & *\end{array}\right)Q_1^T$$

必须对称.

$$\Rightarrow A=Q_1\left(\begin{array}{c|c}\lambda & 0 \\ \hline 0 & *\end{array}\right)Q_1^{-1}$$

归纳即可. □

(V,g) 对称或反对称 ~~对称~~性 双线型. 假设 $f:V\to V$ 线性映射满足

$g(f(x),y)=g(x,f(y))$, $\forall x,y\in V$ (称 f 自伴随)

则若 $W<V$ 使 $f:W\to W$, 会推出 $f:W^\perp\to W^\perp$

现在 (V,g) 内积空间，$f: V\to V$ 自伴随，

$B=(e_1,\cdots,e_n)$ 为 V 一个标准正交基，

$$f(e_1,\cdots,e_n)=(e_1,\cdots,e_n)A.$$

则由 $g(f(x),y)=g(x,f(y))$ 知：

$$\begin{pmatrix} f(e_1)\\ \vdots \\ f(e_n)\end{pmatrix} \underset{g}{\cdot} (e_1,\cdots,e_n) = \begin{pmatrix} e_1\\ \vdots \\ e_n\end{pmatrix} \underset{g}{\cdot} (f(e_1),\cdots,f(e_n))$$

$$\Longrightarrow \quad A^T \underbrace{\begin{pmatrix} e_1\\ \vdots \\ e_n\end{pmatrix} \underset{g}{\cdot} (e_1,\cdots,e_n)}_{=G_{g,B}=I_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} e_1\\ \vdots \\ e_n\end{pmatrix} \underset{g}{\cdot} (e_1,\cdots,e_n)}_{=G_{g,B}=I_n} A$$

$\Longrightarrow \quad A^T=A$. 故 A 对称.

事实上：$f: V\to V$ 自伴随 $\Longleftrightarrow$ f 关于某个标准正交基的矩阵对称 $\Longleftrightarrow$ f 关于任意标准正交基的矩阵对称.

于是反过来，对任意对称阵 $A\in M_n(\mathbb{R})$，我们看其对应的一个自伴随算子 $f: V\longrightarrow V$.

对一个不变子空间 $W\subset V$，有 $W^\perp$ 也不变，而 $V=W\oplus W^\perp$

可一直拆解：$V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$，每个 W_i 都 f-不变

类似之前证明，可说明自伴随算子 $f: V\to V$ 总有特征向量 $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} W_i=1$.

所以 $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$，取 $v_i \in W_i$，$|v_i| = 1$

则 $v_1, \cdots, v_n$ 为一个标准正交基，s.t. $f(v_i) = \lambda_i v_i$

而 $f(e_1, \cdots, e_n) = (e_1, \cdots, e_n) A$

令 $(v_1, \cdots, v_n) = (e_1, \cdots, e_n) Q$，$Q$ 正交

则 $f(v_1, \cdots, v_n) = f(e_1, \cdots, e_n) Q = (e_1, \cdots, e_n) AQ$

$= (v_1, \cdots, v_n) Q^T A Q$

$$\Rightarrow Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

回顾：任 $A \in M_n(\mathbb{R})$，$n \geq 1$，取特征值 $\mu + \lambda i$，$\mu, \lambda \in \mathbb{R}$

$A(u + vi) = (\mu + \lambda i)(u + vi)$，$u, v \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow A(u, v) = (u, v) \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ -\lambda & \mu \end{pmatrix}.$$

所以 A 有实特征向量或者有一个二维不变子空间.

(V, g) 内积空间，$B = (e_1, \cdots, e_n)$ 标准正交基

A 正交阵 $\rightsquigarrow$ $f: V \to V$ 正交变换

$f(e_1, \cdots, e_n) = (e_1, \cdots, e_n) A$

若 $W < V$ f-不变，则 $f: W \xrightarrow{\cong} W$

f 保内积 $\Rightarrow$ $f: W^\perp \xrightarrow{\cong} W^\perp$

拆分 $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$，$W_i$ f-不变.

设每个 W_i 不能再拆 $\Rightarrow$ $\dim W_i = 1$ 或 2.

$f|_{W_i}$ 为 $W_i \to W_i$ 正交变换

而我们已经刻画了二维正交变换.

定理：$A \in M_n(\mathbb{R})$ 正交，则 A 正交相似于

$$\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}, 1, \cdots, -1, \cdots \right)$$

应用于 $O_3(\mathbb{R})$ 与 $SO_3(\mathbb{R})$

对 $A \in SO_3(\mathbb{R})$，A 正交相似于 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \\ \sin\theta & \cos\theta & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

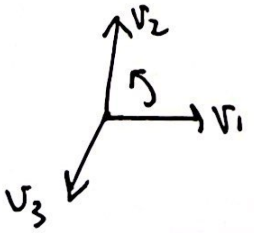
$\det A = 1$

设 $Q^T A Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \\ \sin\theta & \cos\theta & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

设 $Q = (v_1\ v_2\ v_3)$ 则

$$A\,(v_1\ v_2\ v_3) = (v_1\ v_2\ v_3)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \\ \sin\theta & \cos\theta & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

所以 A 作用在 $\mathbb{R}^3$ 上是 v_1-v_2 平面中一个旋转.



v_3 为旋转轴.

(V, g)，$\underset{\neq 0}{v} \in V$ 定义关于 v 的$\overbrace{\text{反射}}^{\text{正交}}$ $s_v : V \to V$

$$x \longmapsto x - \frac{2g(v,x)}{g(v,v)}\, v$$

$s_v(v) = -v$, $\quad s_v|_{H_v} = id \quad H_v = \{x \in V \mid x \perp v\}$

s_v的反射超平面

若 $v_1, \cdots, v_n$ 为 V 标准正交基

则 s_{v_i} 关于 $v_1, \cdots, v_n$ 的矩阵为 $\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$

~~一个方阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$~~ 故 s_{v_i} 为正交变换 正交

两个正交反射的复合是 $SO(V, g)$ 中元素.

$O_3(\mathbb{R})$ 中两个正交反射(矩阵)的复合 $\in SO_3(\mathbb{R})$

$\|$ $\qquad\qquad$ ~ 是一个旋转.

$O(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$