定义：V f.d./$\mathbb{C}$，$h: V\times V \to \mathbb{C}$ 叫作厄米特型（Hermitian form），如果满足：① $h(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 h(x_1,y)+\lambda_2 h(x_2,y)$

② $h(x,y) = \overline{h(y,x)}$.

条件 ② $\Rightarrow$ 所有 $h(x,x)$ 为实数.

例：$h: \mathbb{C}^{(n)}\times\mathbb{C}^{(n)} \to \mathbb{C}$，$h(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$

叫作 $\mathbb{C}^{(n)}$ 上标准厄米特型.

$$h(\vec{x},\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 .$$

思考：类似实线性空间上对称双线性型和二次型的对应，如何从 $h(\vec{x},\vec{x})$ 得到 h？

$$\left.\begin{aligned} |x+y|^2 &= |x|^2+|y|^2+x\bar{y}+y\bar{x} \\ |x+iy|^2 &= |x|^2+|y|^2-ix\bar{y}+iy\bar{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{表达 } x\bar{y}.$$

一般地有：$\forall$ 厄米特型 $h: V\times V \to \mathbb{C}$ 有

$$h(x,y) = \operatorname{Re} h(x,y) + i \operatorname{Im} h(x,y)$$

而 $\operatorname{Re} h(x,y) = \frac{1}{2}\left(h(x+y,x+y) - h(x,x) - h(y,y)\right)$

$$\operatorname{Im} h(x,y) = \frac{1}{2}\left(h(x+iy,x+iy) - h(x,x) - h(y,y)\right).$$

由条件 ② 知 $\operatorname{Re}(h(x,y)) = \operatorname{Re}(h(y,x))$ 对称.

$\operatorname{Im}(h(x,y)) = -\operatorname{Im}(h(y,x))$ 反对称.

$h: V\times V \to \mathbb{C}$ 厄米特，取 V 基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$.

$(h(\alpha_i,\alpha_j)) = H$ Gram 阵 满足 $H = H^* \; (:= \overline{H}^T)$

这样的 H 叫作厄米特方阵.

$$\underbrace{\mathrm{Re}\,H}_{\text{对称}} + i\,\underbrace{\mathrm{Im}\,H}_{\text{反对称}}$$

$H = \mathrm{Re}\,H + i\,\mathrm{Im}\,H$

定义：$A, B \in M_n(\mathbb{C})$，若 $\exists\, P \in GL_n(\mathbb{C})$，$PAP^* = B$，则称 A, B 共轭相合.

现给厄米特型 $h: V\times V \to \mathbb{C}$，$(\alpha_1\cdots\alpha_n)$，$(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 两组基，$(\beta_1,\cdots,\beta_n) = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$，$P\in GL_n(\mathbb{C})$ 过渡阵

则 $(h(\beta_i,\beta_j)) = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_n\end{pmatrix} \cdot_h (\beta_1,\cdots,\beta_n) = \left[P^T\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}\right] \cdot_h \left[(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P\right]$

$= P^T (h(\alpha_i,\alpha_j))\,\overline{P}$

所以两个 Gram 阵共轭相合. $\left((P^T)^* = \overline{P}\right)$.

定理：厄米特方阵共轭相合于对角阵.（对角线元素必为实数）. 证明与实对称阵一样（归纳）.

进一步共轭相合于 $\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0\end{pmatrix}$.

（惯性定理）. p, q 只取决于方阵本身.

证明：类似于实对称阵. 梗概如下.

· 对厄米特型 $h: V\times V\to \mathbb{C}$ 可定义正定，负定，半正定，半负定.

· 存在性定理 $\Rightarrow$ 任何 $h: V\times V\to\mathbb{C}$，可找到正交和分解 $V=\overset{p}{W_1}\oplus\overset{q}{W_2}\oplus W_3$，s.t. $h|_{W_1}>0$；$h|_{W_2}<0$，$h|_{W_3}=0$

· 若 $\exists\ W<V$，$\dim W\geq p+1$，则 $W\cap(W_2\oplus W_3)\neq(0)$，不可能
$h|_W>0$，

所以 $p=\max\{\dim W \mid h|_W>0\}$，只取决于 h. □

定理：H 厄米特阵，则以下等价：

① $H>0$ 正定 ② H 共轭相合于 I ③ $H=P^*P$，P 可逆复方阵
④ H 顺序主子式均 >0 ⑤ H 所有主子式 >0.

定理：H 厄米特阵，则以下等价：

① $H\geq 0$ 半正定 ② H 共轭相合于 $\begin{pmatrix} I & \\ & 0\end{pmatrix}$
③ $H=Q^*Q$，Q 某复矩阵 ④ H 所有主子式 ≥ 0.

定义：(V,h)，V f.d./$\mathbb{C}$，h 厄米特. 若 $h>0$，则称 (V,h) 为一个~~正定~~厄米特内积空间. 也叫酉空间. 对 $x,y\in V$，有时记 $\langle x,y\rangle = h(x,y)$.

可推广以下关于（实）内积空间的概念至酉空间

(V,h)：长度：$x\in V$，$\|x\|:=\sqrt{\langle x,x\rangle}$.

角度：$x,y\in V\setminus\{0\}$，$\theta(x,y)\in \cancel{[0,\pi]}\ [0,\frac{\pi}{2}]$ 使 $\cos\theta(x,y)=\dfrac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\,\|y\|}$

~~有的文献称这个~~ ← 与内积空间不同.

Cauchy-Schwartz 不等式：$|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|$

证：设 $\langle x,y\rangle = re^{i\theta}$，考虑 $\|te^{i\theta}x+y\|^2$，$t\in\mathbb{R}$

则 $t^2\|x\|^2+2rt+\|y\|^2 \ge 0$，$\forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow$ 判别式 ≤ 0. $\square$

等号成立当且仅当 x,y $\mathbb{C}$-线性相关.

三角不等式：$\forall x,y\in V$，$\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$.

证：$\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\|y\|^2$.

$|\langle x,y\rangle|, |\langle y,x\rangle| \le \|x\|\cdot\|y\|$. $\square$

若 x,y 非零，$\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$，则 $\langle x,y\rangle = \|x\|\cdot\|y\| \in\mathbb{R}^+$

可设 $y=\lambda x$，$\lambda\in\mathbb{C}$，则 $\langle x,y\rangle = \bar{\lambda}\langle x,x\rangle \Rightarrow \lambda\in\mathbb{R}^+$.

所以此时 $y\in\mathbb{R}^+x$.

平行四边形等式：$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$

酉空间的标准正交基：$\alpha_1\cdots\alpha_n$，$\|\alpha_i\|=1$，$\alpha_i\perp\alpha_j$.

(Gram-Schmidt 正交化)：任取 (V,h) 的一个基 $v_1,\cdots,v_n$.

$v_1 \rightsquigarrow v_1/\|v_1\|$，$v_2 \rightsquigarrow v_2-\langle v_2,v_1\rangle v_1$，$\cdots$

定理：(V,h) 酉空间，$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)P$.

标准正交基

则 $P^T\bar{P}=I_n$.

定义：$P\in M_n(\mathbb{C})$ 称作酉矩阵若 $PP^*=I_n$.

性质：P 为酉矩阵 $\Rightarrow$ $\bar{P}, P^{-1}, P^*$ 均为酉阵.

$\Rightarrow P^{-1}=P^*$.

定义：两个复方阵 $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ 称作酉相似的，如果存在酉阵 $U\in M_n(\mathbb{C})$ s.t. $A=U^{-1}BU$.

命题：任一复方阵酉相似于上三角阵.

证：老办法. 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$，对 n 归纳.

设 λ 为 A 的一个特征值，v 为一个 λ-特征向量，$v\in\mathbb{C}^{(n)}$. 不妨 $\bar{v}^T v=1$. 将 $v=v_1$ 扩充成 $\mathbb{C}^{(n)}$ 的一个标准正交基 $v_1,\cdots,v_n$，令 $U=(v_1\cdots v_n)$ 为酉阵

则 $AU=(Av_1\cdots Av_n)=(v_1\cdots v_n)\left(\begin{array}{c|c}\lambda & * \\ \hline 0 & *\end{array}\right)$

$\Rightarrow\ U^{-1}AU=\left(\begin{array}{c|c}* & * \\ \hline 0 & *\end{array}\right)$ $\square$

归纳即可

定义：一个方阵 $N\in M_n(\mathbb{C})$ 叫正规的，若 $NN^*=N^*N$.

引理：若正规矩阵 N 酉相似于 $\begin{pmatrix}N_1 & N_2\\ & N_3\end{pmatrix}$，$N_1,N_3$ 为方阵.

则必有 $N_2=0$，N_1 和 N_3 为正规的.

证明：设 $\begin{pmatrix}N_1 & N_2\\ & N_3\end{pmatrix}=U^{-1}NU$，$U$ 酉阵.

则 $U^{-1}NU$ 与 $(U^{-1}NU)^*=U^*N^*(U^{-1})^*=U^{-1}N^*U$ 交换

$\Rightarrow\ U^{-1}NU$ 正规.

所以 $\begin{pmatrix}N_1 & N_2\\ & N_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N_1^* & \\ N_2^* & N_3^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}N_1^* & \\ N_2^* & N_3^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N_1 & N_2\\ & N_3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\ N_1N_1^*+N_2N_2^*=N_1^*N_1\ \Rightarrow\ tr(N_2N_2^*)=0$

$\Rightarrow\ N_2=0.$ $\square$

定理（正规方阵谱定理）. 正规方阵可酉相似对角化.

证明: 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 正规, 则 A 酉相似于上三角阵

$\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix}$, 由引理 $\Rightarrow$ 必为对角阵. $\square$

例. 正规阵例子包括: 实对称, 实反对称, 正交阵, 厄米特阵, 酉阵, 斜厄米特阵 ($K=-K^*$).

推论: ① 厄米特阵（包含了实对称阵）必酉相似于 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, λ_k 为实数.

② 酉方阵（包含正交阵）必酉相似于 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, $\lambda_i = e^{i\theta_i}$, $\theta_i \in \mathbb{R}$.

③ 斜厄米特阵（包含反对称阵）必酉相似于 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, $\lambda_i = \sqrt{-1}\, a_i$, $a_i \in \mathbb{R}$.

证明: ① 设厄米阵酉相似于 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, 则该对角阵也厄米 $\Rightarrow$ λ_i 实.

② 设酉阵 $\underset{\text{酉相似}}{\sim}$ 对角阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$,

则 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 为酉阵 $\Rightarrow$ 每个 λ_i 模长 $=1$

③ 类似.

设 $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为一个 n 维酉空间（即 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的一个 Gram 阵是正定厄米特阵）.

一个线性变换 $\varphi: V\to V$ 叫 正规变换，厄米特变换，酉变换，或斜厄米变换，若 φ 在 V 的一个标准正交基下表示矩阵为相应类型方阵.

用线性变换观点重述谱定理：

引理'：酉空间 V 的正规变换 φ 的不变子空间 W 的正交补 $W^{\perp}$ 也为不变子空间.

~~证：设 $y\in W^{\perp}$，则~~

定理'：设 V 为 n 维酉空间，$\varphi: V\to V$ 正规变换，则 $\exists$ V 的标准正交基 $v_1,\cdots,v_n$，s.t. $\varphi v_k=\lambda_k v_k$.

设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 为 φ 的不同特征值，W_i 为 φ 的 λ_i-特征空间，则 $\varphi=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_k\alpha_k$，$\alpha_i: V\to W_i$ 投影（正交）.

φ 的谱分解.

$V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$.

定理. V n 维酉空间，$\varphi: V\to V$，则 $\exists!$ 线性变换 $\varphi^*: V\to V$，s.t. $\forall\,\alpha,\beta\in V$ 成立

$$\langle\varphi^*\alpha,\beta\rangle=\langle\alpha,\varphi\beta\rangle.$$

设 φ,φ^* 在 V 的一个标准正交基下表示矩阵

为 A, B. 则 $B = A^* = \bar{A}^T$.

称 φ^* 为 φ 的伴随.

证明: 假设 $\langle \varphi^*\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, \varphi\beta\rangle$, $\forall \alpha, \beta$.

取一个标准正交基 $v_1, \cdots, v_n$, 则:

$$\begin{pmatrix} \varphi^* v_1 \\ \vdots \\ \varphi^* v_n \end{pmatrix} \underset{\langle,\rangle}{\cdot} (v_1 \cdots v_n) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \underset{\langle,\rangle}{\cdot} (\varphi v_1 \cdots \varphi v_n)$$

$$\text{左边} = B^T \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \underset{\langle,\rangle}{\cdot} (v_1 \cdots v_n) = B^T$$

$$\text{右边} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \underset{\langle,\rangle}{\cdot} (v_1 \cdots v_n) A = \bar{A}$$

所以 $B^T = \bar{A} \Rightarrow B = A^*$.

反过来, 为构造 φ^*, 只需取一个标准正交基, 设 φ 的矩阵为 A, 然后用 A^* 去得到 φ^*.

$\square$

酉空间 V 上变换 φ:

正规 若 $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$

厄米特 若 $\varphi = \varphi^*$

酉 若 $\varphi\varphi^* = id_V$

斜厄米特 若 $\varphi = -\varphi^*$

定理：V_1, V_2 均为 n 维酉空间，$\varphi: V_1 \to V_2$ lin，

则以下等价：

① φ 保内积

② φ 保向量长度（保距）

③ $\varphi: V_1 \to V_2$ 为线性同构，且保内积

④ φ 把任意 V_1 的标准正交基映为 V_2 的标准正交基

⑤ φ 把某一标准正交基映为标准正交基

⑥ φ 在 V_1 和 V_2 的标准正交基下的方阵表式为酉方阵 $\square$