高斯消元法只取决于 $+,-,\times,\div$ 运算.

如果 $Ax=b$. A 中元素均在 $\mathbb{Q}$ 中. b 中元素均在 $\mathbb{Q}$ 中. 则 $rref(A,b)$ 中的元素也均在 $\mathbb{Q}$ 中.

比较 $x\in\mathbb{Q}^n$ 与 $x\in\mathbb{R}^n$ 中求解的异同

① 是否有解 ✓

② 解的结构 $x=$ $x_{i_1}v_1+x_{i_2}v_2+\cdots+x_{i_s}v_s+x$

也称作是 $v_1\cdots v_s$ 的线性组合.

$x_{i_1},\cdots,x_{i_s}$ free variables

$Ax=b$ 的解.

特解

$x_{i_1},\cdots,x_{i_s}\in\mathbb{Q}$ 或者 $x_{i_1},\cdots,x_{i_s}\in\mathbb{R}$.

线性方程组求解可推广至域上.

域: 某种有"$+$"、"$-$"、"$\times$"、"$\div$"的代数结构 F.

可求解方程组 $Ax=b$. $A\in M_{m\times n}(F)$. $b\in F^m$

关于 $x\in F^n$ 的

F 域可指 $\mathbb{R}$，实数域，$(+,-,\times,\div,0,1)$

$\mathbb{C}$，复数域，

$\mathbb{Q}$，有理数域．　$\mathbb{Q}[i]=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$

$\mathbb{F}_p=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$．

$(+,-,\times,\div,0,1)$

运算"$+$"：$F\times F\to F$．是映射．

$(a,b)\mapsto a+b$

"$\times$"：$F\times F\to F$

$(a,b)\mapsto a\times b$ or $a\cdot b$．

$+,\times$，交换律．结合律．分配律

$a+b=b+a$　　$(a+b)+c=a+(b+c)$．　　$(a+b)c=ac+bc$

$a\cdot b=b\cdot a$　　$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$　　$c(a+b)=ca+cb$．

存在 $0,1$，使得　　$0+m=m$，　$1\cdot m=m$．

对任意 m，存在 $-m$，　$m+(-m)=0$

对任意 $m\neq 0$，有 m^{-1}，　$m\cdot(m^{-1})=1$

例如：　$\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(a,b)\mid a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}\}$．（也记作 $\mathbb{R}^2$）

定义"$+$"　$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

"$\times$"　$(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,\ ad+bc)$

验证 结合律. 交换律. 分配律.

"+" 结合, 交换.

"×" 结合律: $((a,b)\times(c,d))\times(e,f) = (ac-bd, ad+bc)\cdot(e,f) = (ace-bde-adf-bcf, acf-bdf+ade+bce)$

$(a,b)\times((c,d)\times(e,f)) = (a,b)\times(ce-df, cf+de)$

$= (ace-adf-bcf-bde, acf+ade+bce-bdf)$

交换律: 类似

分配律: 类似

有 "0" $=(0,0)$. $(0,0)+(a,b)=(a,b)$

"1" $=(1,0)$. $(1,0)\cdot(a,b)=(a,b)$

验证: $-(a,b) = (-a,-b)$

$(a,b)\neq(0,0)$, 有 $(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

$$(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = (1,0)$$

注意到 $(0,1)\times(0,1) = (-1,0) = -(1,0)$

有 $(0,1)^2 = "-1"$

用 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 构造了复数.

即 (a,b) 对应于 $a+bi$.

$(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$

$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$.

类似可以验证 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $+,-,\times,\div$, $0,1$

p 素数. 是域. $=\{\bar{0},\bar{1},\cdots \bar{p-1}\}$

$\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ 不是域. $\bar{p}\neq 0$. 但 $\bar{p}$ 没有逆.

不存在 $m\in\mathbb{Z}$, $mp\equiv 1 \pmod{p^2}$

$\mathbb{F}_2^2$, $\mathbb{F}_2\times\mathbb{F}_2 = \{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{F}_2\}$

$(a,b)\times(c,d) = (ac+bd,\ ad+bc+bd)$

想法: $(a+bx)\times(c+dx) = ac+bdx^2+(ad+bc)x$

$ac+bd+(ad+bc+bd)x$

且有 $x^2+x+1=0$, 即 $x^2=x+1$.

$0=(0,0)$, $1=(1,0)$, $a_1=(0,1)$
$a_2=(1,1)$

×	0	1	a_1	a_2
0	0	0	0	0
1	0	1	a_1	a_2
a_1	0	a_1	a_2	1
a_2	0	a_2	1	a_1

$a_1\times a_2=(1,0)$
$a_1\times a_1=(1,1)$
$a_2\times a_2=(0,1)$

四个元素的域.

更多例子 $F(\lambda)=\left\{\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}\ \middle|\ f(\lambda)\in F[\lambda],\ g(x)\in F[\lambda],\ g(x)\neq 0\right\}$

非域的例子 $F[\lambda]$, $\mathbb{Z}$, (除了非零元乘法可逆以外均满足)
不能作 Gauss 消元法.

R 如果只有 +, ×, 0, 1. 去掉非零元可逆条件, 称 R 为(交换)环
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$, ...

环 R 上 仍然可以定义矩阵乘法, 方阵的行列式 (利用完全展开定义)
……等只依赖于乘法(加法)的运算. ($(AB)C=A(BC)$ 矩阵乘法结合律.)

问题: 是否有 $\det(AB)=\det A\cdot\det B$, $AA^*=A^*A=(\det A)I_n$??

利用一般域上的线性代数来做 $\mathbb{R}$ 上的线性代数.

Recall: 求 $G(m,n)$ 中 i-维 schubert 胞腔个数 b_i.

F field $v_1 \cdots v_m \in F^n$. 是 $W \subset F^n$, $\dim W = m$ 的基.

$w_1 \cdots w_m \in F^n$, 也是 W 的基当且仅当

$(v_1 \cdots v_m) = (w_1 \cdots w_m) \cdot A$.

$A \in M_m(F)$. A 可逆.

记 $GL(m,F) = \{ A \in M_m(F) \mid A \text{ 可逆} \}$

写作行向量 $\begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_m^T \end{pmatrix}$

初等行变换. $\exists A \in GL(m,F)$. s.t.

$$AB = rref(B)$$

且 $rref(B)$ 和 W 唯一确定.

$G(2,4)$. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \end{pmatrix}$ F^4 中的基. $\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$ F^3 中的基

$\#\{F^i\} = b_i$.

求 $\sum_{i=1}^{m(n-m)} b_i t^i = f(t)$

当 $F = \mathbb{F}_p$ 时，有 $f(p) = \#GL(m,n)$（为什么）

（因为 $\#F^i = p^i$）

第一方面 $f(p) = \dfrac{(p^n-1)(p^n-p)\cdots(p^n-p^{m-1})}{(p^m-1)(p^m-p)\cdots(p^m-p^{m-1})}$ (Claim)

证明：$\mathrm{Span}(v_1 \cdots v_m) = W$.

v_1 选取有 p^n-1 种（$\neq 0$）

$v_2 \notin \mathrm{Span}(v_1)$，有 p^n-p 种

$v_3 \notin \mathrm{Span}_F(v_1, v_2)$，有 p^n-p^2 种

又 $(v_1 \cdots v_m) = (w_1 \cdots w_m)\cdot A$.

同样 $\#GL(m,F) = (p^m-1)\cdots(p^m-p^{m-1})$

所以 $$f(p)=\frac{(p^n-1)(p^{n-1}-1)\cdots(p^{n-m+1}-1)}{(p^m-1)(p^{m-1}-1)\cdots(p-1)}$$

Claim $$f(t)=\frac{(t^n-1)(t^{n-1}-1)\cdots(t^{n-m+1}-1)}{(t^m-1)(t^{m-1}-1)\cdots(t-1)}$$

因为 $f(t)\cdot(t^m-1)\cdots(t-1)$

$=(t^n-1)\cdots(t^{n-m+1}-1)$ 对无穷多 t 成立，则多项式左边=右边.