

一般的线性空间 (向量空间)
vector space.

例如: 求解 $[0, \infty)$ 上的光滑函数 $f(t)$

$$f''(t) + f(t) = 0 \quad (\text{自由弹簧的方程}) \quad (\text{谐振子})$$

解的结构 $f(t) = x_1 \sin t + x_2 \cos t$
 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$f''(t) + f(t) = \sin t \quad (\text{有外力的弹簧方程})$$

$$f(t) = \underbrace{-\frac{1}{2} t \cos t}_{\text{特解}} + \underbrace{x_1 \sin t + x_2 \cos t}_{\text{齐次的解}},$$

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
特解.

齐次的解.

希望定义 线性空间.

V ~~非空~~ 集合, 和以下结构, 则称 V 是 $\mathbb{R}$ -vector space

① 加法: $V \times V \rightarrow V \quad (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$

② 数乘: $\mathbb{R} \times V \rightarrow V \quad (c, v) \mapsto c \cdot v$
(或记作 $c v$)

满足: ① 加法, 交换, 结合, 有 "0", 有逆 $-v$

② 数乘: 结合 $c_1 (c_2 v) = (c_1 c_2) v$
"1" $1 \cdot v = v$

③ 分配律: $(c_1 + c_2) v = c_1 \cdot v + c_2 \cdot v$

$$c_1 (v + w) = c_1 v + c_1 w$$

例子: $\mathbb{R}^n$,

$\mathbb{R}^n$ 中的子空间 W

$$V = C^\infty([0, +\infty)) \quad (f_1 + f_2)(t) \stackrel{\text{定义为}}{=} f_1(t) + f_2(t) \\ 0 = \text{常值为0的函数}$$

更多例子: $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ + , .

$$P_n(\mathbb{R}) = \text{polynomials with } \deg \leq n.$$

$$\mathbb{R}[t] = \text{polynomials of } t.$$

$$\{ n \times n \text{ 实上三角矩阵} \} \subset M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

非例子:

$$\{ \text{可逆 } n \times n \text{ 实矩阵} \} = GL_n(\mathbb{R}), \text{ 通常的 "+" 在}$$

$GL_n(\mathbb{R})$ 上不能定义, "不封闭".

$$A + (-A) = 0 \notin GL_n(\mathbb{R})$$

$$\{ \deg = n \text{ polynomials} \} \quad "+" \text{ 不封闭.}$$

性质: $\cdot 0$ 元 唯一

证明: $0 + 0' = 0, \quad 0 + 0' = 0'$

$$\Rightarrow 0 = 0'$$

$\square$

性质: 加法逆元唯一. $v + w_1 = v + w_2 = 0$ in V .

$$\text{即 } w_1 = w_2$$

证明: $w_1 + (v + w_2) = (w_1 + v) + w_2$

$$\Rightarrow w_1 = w_2$$

$\boxed{\text{证毕} - v.}$

1.4 节:

$$\underbrace{0 \cdot v}_{\in \mathbb{Z}} = 0 \in V.$$

证明: $(0 + 0)v = 0 \cdot v \Rightarrow 0 \cdot v + 0 \cdot v = 0 \cdot v$

$$(-0 \cdot v) + (0 \cdot v + 0 \cdot v) = (-0 \cdot v) + 0 \cdot v$$

$$\Rightarrow 0 \cdot v = 0$$

$\square$

HW: $\exists$ $i \in \mathbb{Z}$ $C \cdot 0 = 0$.

$$n \wedge \text{及 } (-1) \cdot v = -v$$

线性相关性: 在 V 中 $\text{Span}_{\mathbb{K}}(v_1, \dots, v_n)$

$W \subset V$ 子空间, W ① 加法 ② 数乘 封闭. $= \{ \text{linear combinations of } v_1, \dots, v_n \}$

例子: $\text{Span}_{\mathbb{K}} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 6 \end{pmatrix}}_{v_2} \right) = \text{Span}_{\mathbb{K}} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 6 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}}_{v_3} \right)$

因为 $v_3 = 2v_2 - v_1$,

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 &= a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 (2v_2 - v_1) \\ &= (a_1 - a_3) v_1 + (a_2 + 2a_3) v_2 \end{aligned}$$

v_3 是多余的 (redundant)

寻找“最经济”最小的生成元组以及 Span 中 linear combination 的系数唯一性 (线性表示的唯一性)

定义 (线性无关) $V_1, \dots, V_n \in V$.

如果 0 表示为 $V_1 \dots V_n$ 的线性组合的方式

$$0 = a_1 V_1 + \dots + a_n V_n \text{ 只有组合系数 } a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

则称 $V_1 \dots V_n$ 线性无关 (或者称 0 只有平凡的线性表示)

(线性相关) 0 有非平凡 (non trivial) 的线性表示

即存在 $a_1 \dots a_n$ 不全为 0, 使得

$$a_1 V_1 + a_2 V_2 + \dots + a_n V_n = 0.$$

例子: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ 线性无关

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ 线性相关.

证明: $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 有唯一解

$$(二) \text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 2$$

一般的.

线性无关

定理: $v_1 \cdots v_n \in \mathbb{R}^m$ linearly independent

$$(\Leftrightarrow) \text{rk}(v_1 \cdots v_n) = n$$

也称作 $A = [v_1 \cdots v_n]$ 是列满秩.

推论: $\mathbb{R}^m$ 中 k 个向量在 $k > m$ 时 一定线性相关

$A = [v_1 \cdots v_n]$ $v_1 \cdots v_n$ 线性相关无关与 $AX=0$ 是否有非零解有关.

换言之.

定理: 对 A 作行变换不改变 $v_1 \cdots v_n$ 或者某子向量组的线性关系, (线性相关或无关,

以及相关时 0 的线性表示) 证明: 转化为 $AX=0$

注意: 行变换会改变 $\text{span}_{\mathbb{R}}(v_1, \cdots, v_n)$, 试举例说明
列空间.

定理: $v_1 \cdots v_n$ 线性无关, 则 $v \in \text{span}_{\mathbb{R}}(v_1 \cdots v_n)$

v 写成 $v_1 \cdots v_n$ 的线性组合式子的系数由 v 唯一确定.

证明:
$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$
$$= b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$$

$$(a_1 - b_1)v_1 + \dots + (a_n - b_n)v_n = 0$$

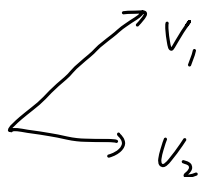
由 $v_1 \dots v_n$ 线性无关, $a_1 - b_1 = 0 = a_2 - b_2 = \dots = a_n - b_n$
 $a_i = b_i$.

另一个观点. Span 来检测 linearly independent.

例子: $n=1$, v_1 线性无关 $\Leftrightarrow v_1 \neq 0$

$n=2$, v_1, v_2 线性无关 $\Leftrightarrow v_1 \neq 0$

且 $v_2 \notin \text{span}_{\mathbb{K}} v_1$



$n=3$, v_1, v_2, v_3 线性无关 $\Leftrightarrow v_1 \neq 0$

$v_2 \notin \text{span}_{\mathbb{K}} v_1$

$v_3 \notin \text{span}_{\mathbb{K}}(v_1, v_2)$

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$ 非平凡表述.

$$\text{若 } a_3 \neq 0, \Rightarrow v_3 = -a_3^{-1}(a_1 v_1 + a_2 v_2)$$

$$= (-a_3^{-1} a_1) v_1 + (-a_3^{-1} a_2) v_2$$

$$\text{若 } a_3 = 0, a_2 \neq 0, \Rightarrow v_2 = (-a_2^{-1} a_1) v_1$$

$$\text{若 } a_3 = 0, a_2 = 0, a_1 \neq 0, \Rightarrow v_1 = 0.$$

有用的定理: (重要)

定理: $v_1, \dots, v_n$ 线性无关.

则 $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$ 线性相关 等价于 $v_{n+1} \in \text{Span}_{\mathbb{R}}(v_1, \dots, v_n)$

证明: " $\Rightarrow$ " $a_1 v_1 + \dots + a_{n+1} v_{n+1} = 0, a_1, \dots, a_{n+1}$ 不全为 0.

$\Rightarrow a_{n+1} \neq 0$, 否则 $\begin{cases} a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0 \\ a_1, \dots, a_n \text{ 不全为 } 0. \end{cases}$

与 $v_1, \dots, v_n$ 线性无关矛盾.

$$v_{n+1} = (-a_{n+1}^{-1} a_1) v_1 + \dots + (-a_{n+1}^{-1} a_n) v_n \in \text{Span}_{\mathbb{R}}(v_1, \dots, v_n)$$

" $\Leftarrow$ "

极大线性无关组.

$v_1, \dots, v_n$ 中的

定义: $v_1, \dots, v_n \in V$. 称 $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ 是极大线性无关组

如果 ① 线性无关

(在包含关系下极大) ② $\forall i_{k+1} \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$.

$v_{i_1}, \dots, v_{i_k}, v_{i_{k+1}}$ 线性相关.

定理: $\text{Span}_{\mathbb{R}}(v_1, \dots, v_n) = \text{Span}_{\mathbb{R}}(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$

证明: $v_{i_{k+1}} \in \text{Span}_{\mathbb{R}}(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$

$\Rightarrow \checkmark$

存在性:

定理: $v_1, \dots, v_n$ 不全为 0, 则一定存在极大线性无关组.

证明: 一种方法: "最大 $\Rightarrow$ 极大"
 $\downarrow$ 包含关系下的
数目 $\checkmark$

取 $\{k = v_1, \dots, v_n \text{ 中线性无关的向量组中向量的个数}\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 非空, 有最大值.

另一种方法: 假设 $v_1 \neq 0$, 依次考察

v_1, v_2 相关, 则剔除 v_2 . 无关, 则保留 v_2

v_1, v_2, v_3 相关, $\dots$ $v_1, \dots, v_k$ 无关, v_{k+1}
 $\vdots$

得到 $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$, 验证线性无关, 极大

问题: 作线性无关组的"极大"是否也是绝对数目的最大.

性质: $V = \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$. (2)

(重要)

$\forall w_1, \dots, w_m \in V$, 如果 $m > n$, (2)

$w_1, \dots, w_m$ 线性相关.

证明: $w_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$, (1)

$$(2) \quad \sum_{j=1}^m x_j w_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (a_{ij} x_j) v_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \right) v_i$$

让 v_i 前的系数为 0 $\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j = 0$

$$(*) \quad A \cdot x = 0 \quad A = (a_{ij}) \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$m > n$, $\Rightarrow (*)$ 有非零解.

$$\Rightarrow \exists \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \neq 0, \text{ s.t. } x_1 w_1 + \dots + x_m w_m = 0$$

注意, 一个反例 (1) 可证 $(v_1, \dots, v_n)$. $A = (w_1, \dots, w_m)$

让 $x_1 w_1 + \dots + x_m w_m = (w_1, \dots, w_m) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, (2) (3)

$$\text{有 } (w_1 \dots w_m) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \underbrace{(v_1 \dots v_n) \cdot A}_{\text{线性组合}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

线性组合

$$= (v_1 \dots v_n) \cdot \underbrace{\left(A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)}_{\substack{\downarrow \\ \text{矩阵乘法.}}}$$

线性组合复合.

V 中极大线性无关组 ① $v_1, \dots, v_n$ 线性无关

② $\forall w \in V$.

$v_1, \dots, v_n$

$v_1, \dots, v_n, w$ 线性相关.

($\Leftrightarrow w \in \text{Span}_{\mathbb{R}}(v_1, \dots, v_n)$)

推论: $V = \text{span}_{\mathbb{R}}(v_1, \dots, v_n)$, 则 V 中存在极大线性无关组, $w_1, \dots, w_m$. 且 $m \leq n$.

$$\textcircled{2} V = \text{span}_{\mathbb{R}}(w_1, \dots, w_m)$$

$\textcircled{3}$ 任意两组 V 中极大线性无关组有相同数目的向量.

证明: $\textcircled{1}$ 前性质 $\Rightarrow m \leq n$.

$\textcircled{2}$ 若 $V \neq \text{span}_{\mathbb{R}}(w_1, \dots, w_m)$, $\exists w_{m+1} \in$

$$V \setminus \text{span}_{\mathbb{R}}(w_1, \dots, w_m)$$

则 $w_1, \dots, w_{m+1}$ 线性无关.

$\textcircled{3}$ 若 $w'_1, \dots, w'_{m'}$ 极大线性无关, 则 $V = \text{span}(w'_1, \dots, w'_{m'})$.

$$\Rightarrow m \leq m', \quad m' \leq m.$$

$$\Rightarrow m = m'$$

推论: 无穷多个 $\{v_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, 定义线性无关性.

$$\underbrace{a_{i_1} v_{i_1} + \dots + a_{i_n} v_{i_n}}_{\text{有限和}} = 0, \text{ 则 } a_{i_1} = \dots = a_{i_n} = 0$$

定义: V 中一组向量 $v_i, i \in \mathbb{Z}$.

(基)
basis) 满足

- ① $\{v_i, i \in \mathbb{Z}\}$ 是线性无关.
- ② $V = \text{span}_{\mathbb{R}}(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

则称 $v_i, i \in \mathbb{Z}$ 是 V 的一组基.

另所定义: $\forall v \in V$, v 是 v_i 的线性组合.

且组合系数唯一.

基的列子:

$$\mathbb{R}^n, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{m \times n}(\mathbb{R}), \quad E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow j\text{th} \\ \leftarrow i\text{th} \end{matrix}$$

$$\{ \deg \leq n \text{ 的多项式} \} = P_n$$

$$\text{有 basis } 1, t, t^2, \dots, t^n.$$

$$\{ f'' + f = 0 \} \text{ 的解有 basis}$$

$$\sin t, \cos t$$

以上结论 $\Rightarrow$ 极大线性无关组是基.

性质: 若 V 由有限个 $v_1, \dots, v_n$ 生成, 则 V 有基.

注: 对一般 V 成立. 例如 $\mathbb{R}[t]$

有基 $1, t, t^2, \dots, t^k, \dots$

定义: (维数) $\dim_{\mathbb{R}} V = V$ 的基中元素个数

基的性质:

① $V = \text{Span}(v_1, \dots, v_n) \Rightarrow n \geq \dim V$

② $v_1, \dots, v_n$ 线性无关 $\Rightarrow n \leq \dim V$

③ $n = \dim_{\mathbb{R}} V$

线性无关组
可扩展到极大.

①, ②, ③ 任意两条 $\Rightarrow$ 基.

维数定理.

$$A \in M_{n \times n}(F)$$

Recall 性质: 行变换不改变行空间.
行变换不改变列的线性关系.

定理: 行秩 = $\dim(\text{行空间})$

列秩 = $\dim(\text{列空间})$

行秩 = 列秩.

证明: $\text{rref}(A) = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \times & \times & 0 & \dots \\ & v_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$

在 $\text{rref}(A)$ 中非零行线性无关.

且 $\text{Span}_F(v_1, \dots, v_k) = \overbrace{\text{行空间}}^{A \text{ 的}}$

另一方面有

性质: $v_1, \dots, v_n$ 中在包含关系下的极大线性无关组 $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ 有

$$\text{Span}_F(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) = \text{Span}_F(v_1, \dots, v_n)$$

所以列空间维数 = 列中极大线性无关组的向量个数

行变换不改变列的线性关系, 所以
有 pivot 对应的列是极大线性
无关的. $\Rightarrow$ pivot 个数 = 列空间
维数

$\Rightarrow$ 行秩 = 列秩 (又证明了一次).

维数单调性: $W_1 \subseteq W_2$. 则
 $\dim W_1 \leq \dim W_2$

推论: $\text{rk}(AB) \leq \text{rk}(A)$

证明: AB 的列空间 $\subseteq A$ 的列空间.

基的扩充性质: V 有限生成, 则

$v_1, \dots, v_k$ 线性无关组可添加向量

$v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ 作成 V 的基.

维数守恒: $\dim(\ker A) + \dim(\text{列空间}) = n$ (即 A 的列数)

证明: $AX=0$ 的解有 $x = x_1 v_1 + \dots + x_k v_k$
 $x_1, \dots, x_k$ 自由元这样的唯一表达, 则

$\dim(\ker A) = \text{rref}(A)$ 中
自由元的个数 $\square$

无穷维空间的基

例子: $V = \mathbb{C}^\omega([0,1])$

$V = F[t]$ has basis

$1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$

(介绍性的)

定理: V 存在一组基且任意两组基的
集合势相同

(证明略去)

例如: $V = \left\{ \frac{at^2 + bt + c}{t^3 - t} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

$\dim V = 3$ with basis

$$\frac{t^2}{t^3 - t}, \frac{t}{t^3 - t}, \frac{1}{t^3 - t}$$

如果考虑积分, 则有 $\frac{1}{t}, \frac{1}{t-1}, \frac{1}{t+1}$ 更好

(为什么是基, 利用线性无关性)

$\lim_{t \rightarrow 0, 1, -1}$ 证明

$$\int \frac{1}{t} = \ln t + C, \dots$$

希望知道 $\frac{at^2 + bt + c}{t(t+1)(t-1)}$ 如何写作

$$C_1 \frac{1}{t} + C_2 \frac{1}{t-1} + C_3 \frac{1}{t+1}, \quad C_1, C_2, C_3$$

向量的坐标表达.

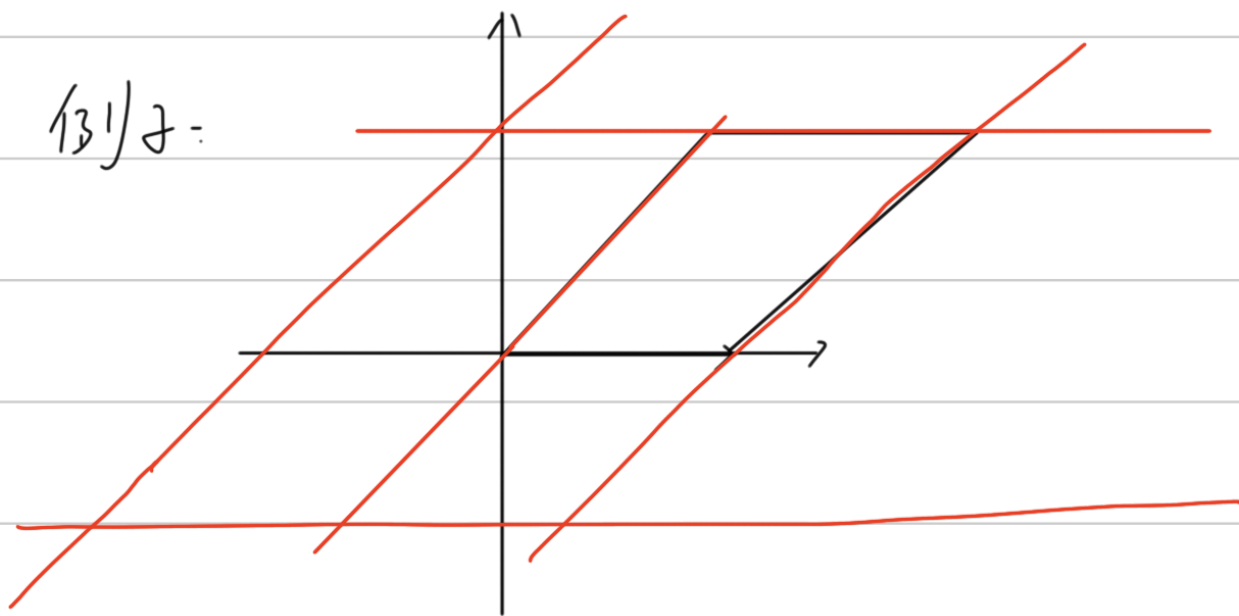
定义: V $\mathbb{R}$ -线性空间 有基 $B = v_1 \cdots v_n$

则 $\forall v \in V$, $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$
 $x_i \in \mathbb{R}$.

称 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 为 v 在 B 下的坐标

$$[v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

例子:



(经纬线, 网格, 确定坐标)

例子: $v = \frac{3t^2 + t + 2}{t^3 - t}$,

$B: \frac{1}{t^3 - t}, \frac{t}{t^3 - t}, \frac{3t^2}{t^3 - t}$

$(\bar{v})_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$

$C: \frac{1}{t}, \frac{1}{t-1}, \frac{1}{t+1},$

$(\bar{v})_C = ?$

如何由 $(\bar{v})_B$ 到 $(\bar{v})_C$

一般的, $B: v_1, \dots, v_n$ 是 V -组基

$C: w_1, \dots, w_n$ 是 V -组基.

(2.1) $v = (v_1, \dots, v_n) \cdot (\bar{v})_B$

$= (w_1, \dots, w_n) \cdot (\bar{v})_C$

另一方面: $w_1 = (v_1, \dots, v_n) \cdot (\bar{w}_1)_B,$

:

$w_n = (v_1, \dots, v_n) \cdot (\bar{w}_n)_B$

$$121) \quad (w_1, \dots, w_n) = (v_1, \dots, v_n) \cdot \left([w_1]_B, \dots, [w_n]_B \right)$$

$$v = (w_1, \dots, w_n) \cdot [\bar{v}]_C$$

$$= \left((v_1, \dots, v_n) \cdot \left([w_1]_B, \dots, [w_n]_B \right) \right) [\bar{v}]_C$$

$$= (v_1, \dots, v_n) \cdot \underbrace{\left([w_1]_B, \dots, [w_n]_B \right)}_{\downarrow} [\bar{v}]_C$$

线性组合的复合是矩阵
球法. $P_B \leftarrow C$

$$\text{性质: } [\bar{v}]_B = P_{B \leftarrow C} \cdot [\bar{v}]_C$$

定义: $P_{B \leftarrow C}$ 基的转换矩阵.

$$\text{有性质: } ① \quad P_{B \leftarrow B} = I_n$$

$$② \quad P_{B_3 \leftarrow B_1} = P_{B_3 \leftarrow B_2} P_{B_2 \leftarrow B_1}$$

$$③ \quad P_{C \leftarrow B} \cdot P_{B \leftarrow C} = I_n$$

例子中如何计算？

例子: $v = \frac{3t^2 + t + 2}{t^3 - t}$,

$B: \frac{1}{t^3 - t}, \frac{t}{t^3 - t}, \frac{3t^2}{t^3 - t}$

$(\bar{v})_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$

$C: \frac{1}{t}, \frac{1}{t-1}, \frac{1}{t+1},$

$(\bar{v})_C = ?$

$P_{B \leftarrow C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$P_{C \leftarrow B} = (P_{B \leftarrow C})^{-1} =$

$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$[v]_C = P_{C \leftarrow B} [v]_B = \dots$$

直观 V 有基 $v_1, \dots, v_n$, 则 V 与 $\mathbb{R}^n$ 相同

例如 $M_{m \times n}(\mathbb{R}) \xrightleftharpoons[F]{F} \mathbb{R}^{mn}$ 有双射, 且

‘保持’ 结构,

$$F(A+B) = F(A) + F(B)$$

$$F(\lambda A) = \lambda F(A)$$

$$\begin{pmatrix} F(0) = 0 \\ F(-A) = -F(A) \end{pmatrix}$$

引入 线性映射:

定义: V, W $\mathbb{R}$ -线性空间. 则称

$T: V \rightarrow W$ 映射 是线性 ($\mathbb{R}$ -线性)

$$\text{如果 } T(v+w) = T(v) + T(w)$$

$$T(\lambda v) = \lambda T(v)$$

如果 T 是双射, 称 T 为线性同构.

性质: 必有 T 满足 $T(0_V) = 0_W$

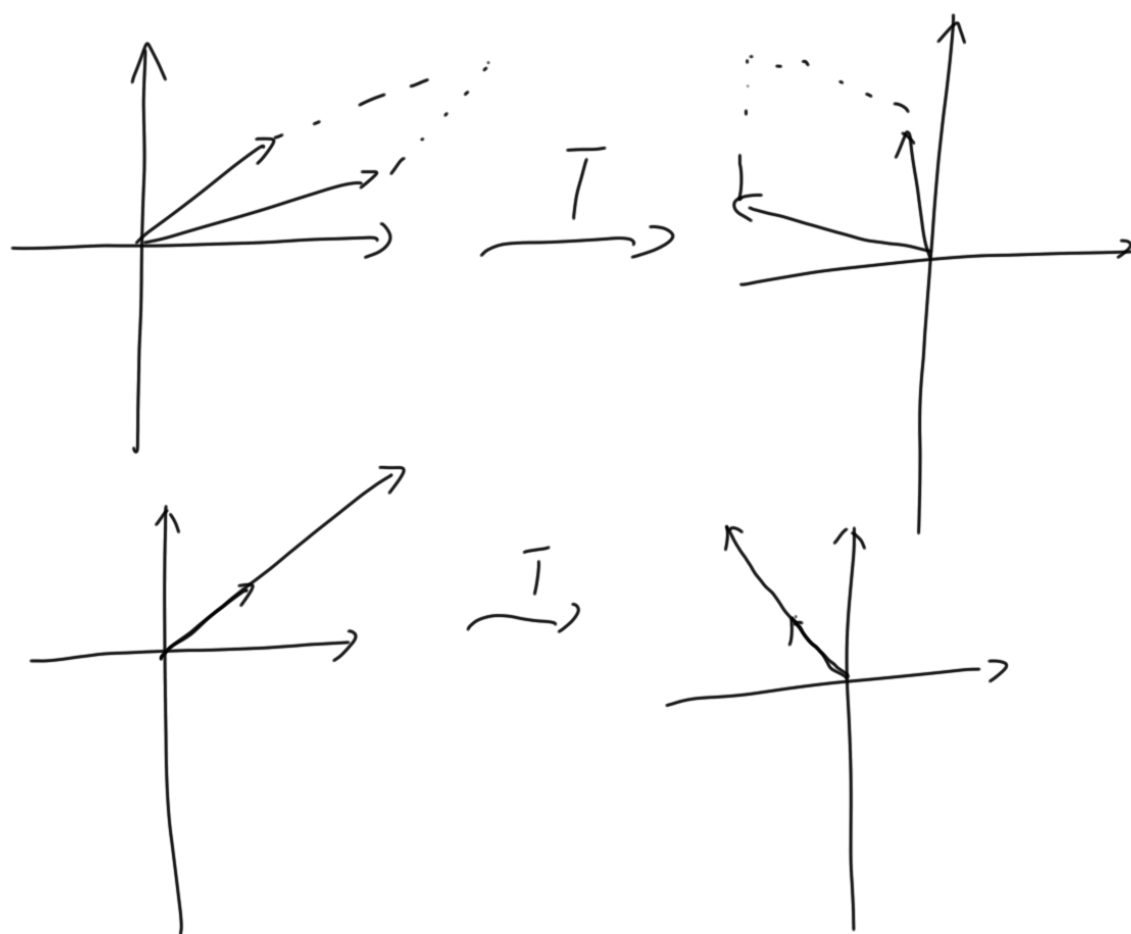
$$T(-v) = -T(v)$$

$$\text{证明: } T(0 \cdot v) = 0 \cdot T(v) = 0$$

$$T(-v) = T((-1) \cdot v) = (-1) \cdot T(v) = -T(v)$$

或者只用‘+’也可以 (练习)

例子: ① $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 旋转, (反射)



② $T: C^\infty[0, +\infty) \rightarrow C^\infty[0, +\infty)$

$$f \mapsto f'' + f$$

③ 对 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ 定义:

$$T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \mapsto Ax$$

定义: $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) = \{ T: V \rightarrow W \mid T \text{ 是 } \mathbb{R}\text{-线性的} \}$

$\text{Hom}_F(V, W)$ 有 “+” “.”

$$\textcircled{1} (T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v)$$

$$\textcircled{2} (c \cdot T)(v) = c \cdot T(v)$$

验证良定 (well-defined). (即 $T_1 + T_2$ 仍然是 $\mathbb{R}$ -线性)

性质:

$$\text{Hom}(V, W) \times \text{Hom}(W, L) \rightarrow \text{Hom}(V, L)$$

$$(f, g) \mapsto g \circ f$$

线性映射与矩阵的关系:

$$\textcircled{1} M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Hom}_F(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

$$A \mapsto T_A$$

性质: $A \mapsto T_A$ 是一个双射 ($\mathbb{R}$ -线性)

证明:

(回忆: 之前定义线性函数)

“单射”. 若 $\underline{T_A = T_B}$.

$$\begin{aligned} \text{则 } T_A(e_i) &= \underline{A \text{ 的第 } i \text{ 列}} \quad \underline{A \cdot e_i} \\ &= T_B(e_i) = \underline{B \text{ 的第 } i \text{ 列}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = B$$

“满射” $T \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

(找到 A , 使得 $T = T_A$)

$$\text{令 } A = [\underline{T(e_1)}, \underline{T(e_2)}, \dots, \underline{T(e_n)}].$$

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\underline{(e_1, \dots, e_n)} \underline{[v]_B}) \\ &= \underline{(T(e_1), \dots, T(e_n))} \underline{[v]_B} \\ &= A \cdot v = T_A(v) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = T_A$$

性质! $B = \{v_i\}_{i \in I}$ 是 V 的基.

$T: V \rightarrow W$ 线性映射. 由 T 在 B 中
向量取值 “唯一-确定”.

换句话说:

对任意 $\{w_i\}_{i \in I}$, $w_i \in W$. 存在唯一的
 $T \in \text{Hom}_F(V, W)$ 使得 $T(v_i) = w_i$.

关键点: $T(a_{i_1} v_{i_1} + \dots + a_{i_k} v_{i_k})$
 $= a_{i_1} w_{i_1} + \dots + a_{i_k} w_{i_k}$ (*)

如果 T 存在, 则 T 有 (*)

(*) 可以 “well-defined” 定义一个线性映射.

一般的 V, W , $\dim V = n$. $\dim W = m$

$$M_{m \times n}(\mathbb{R}) \longleftrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$$

取定: V 的基 $B: v_1, \dots, v_n$

W 的基 $C: w_1, \dots, w_m$.

$$\text{Rep}: \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

$$T \longmapsto \begin{bmatrix} [T(v_1)]_C, [T(v_2)]_C, \dots, [T(v_n)]_C \end{bmatrix}$$

性质: Rep 是一个双射.

证明: 因性质 1.

性质: Rep 也是线性映射.

线性同构: $T: V \rightarrow W \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$
是双射.

($\Leftrightarrow$) T 在 $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(W, V)$ 中有左逆和右逆.

$\Rightarrow T^{-1}$ 也是线性.

定义: 将 $\text{Rep}(T)$ 记作 $[T]_{B,C}$

称为 T 在 B, C 下的矩阵. (T 的表示矩阵)

性质: ① 换基. V, B_1, B_2 基.
 W, C_1, C_2

$$T: V \rightarrow W,$$

$$\underline{[T]_{B_1}^{C_1}} = \underline{P_{C_1 \leftarrow C_2}} \underline{[T]_{B_2}^{C_2}} \underline{P_{B_2 \leftarrow B_1}}$$

相称

② 复合: $\frac{T_1: V_1 \rightarrow V_2}{T_2: V_2 \rightarrow V_3}$

V_1, B_1
 V_2, C 基.
 V_3, D

$$\frac{[T_3 \circ T_2]_{D_1}^{C_1}}{= [T_3]_{D_1}^{C_1} \circ [T_2]_{D_1}^{C_1}}$$

$$[T_2 \circ T_1]_B^D = [T_2]_C^D \cdot [T_1]_B^C$$

↑
矩阵乘法.

马金超 ① $B_1, v_1, \dots, v_n$ $C: w_1, \dots, w_m$
 $B_2, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$

$$\underline{[\bar{T}]_{B_1}^C}$$

$$\underline{[\bar{T}]_{B_2}^C}$$

$$[\bar{T}]_{B_1}^C = ([\bar{T}(v_1)]_C, \dots, [\bar{T}(v_n)]_C)$$

$$[\bar{T}]_{B_2}^C = ([\bar{T}(\bar{v}_1)]_C, \dots, [\bar{T}(\bar{v}_n)]_C)$$

$$P_{B_2 \leftarrow B_1} = ([v_1]_{B_2}, \dots, [v_n]_{B_2})$$

$$\Rightarrow (v_1, \dots, v_n) = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) \cdot P_{B_2 \leftarrow B_1}$$

$\uparrow$
 加法和数乘

$$\underline{(\bar{T}(v_1), \dots, \bar{T}(v_n))} \quad n \text{ 个 } W \text{ 中的向量.}$$

$$= \bar{T}(v_1 : \dots : v_n)$$

$$= \bar{T}((\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) \cdot P_{B_2 \leftarrow B_1})$$

$$= (\bar{T}(\bar{v}_1), \dots, \bar{T}(\bar{v}_n)) \cdot P_{B_2 \leftarrow B_1}$$

$$T(v_1) = (w_1 \dots w_m) \cdot [\bar{v}_1]_C$$

$$T(v_2) = (w_1 \dots w_m) \cdot [\bar{v}_2]_C$$

⋮

$$\boxed{(T(v_1) \dots T(v_n)) = (w_1 \dots w_m) \cdot [\bar{T}]_{B_1}^C}$$

$$= \underbrace{(T(\bar{v}_1) \dots T(\bar{v}_n))}_{P_{B_2 \in B_1}}$$

$$= \left((w_1 \dots w_m) \cdot [\bar{T}]_{B_2}^C \right) \cdot P_{B_2 \in B_1}$$

$$= (w_1 \dots w_m) \cdot \left([\bar{T}]_{B_2}^C \cdot P_{B_2 \in B_1} \right)$$

$$\Rightarrow [\bar{T}]_{B_1}^C = [\bar{T}]_{B_1}^C \cdot \underline{P_{B_2 \in B_1}}$$

由 ①, 可以定义 $\text{rk}(T) = \text{rk}[\bar{T}]_B^C$

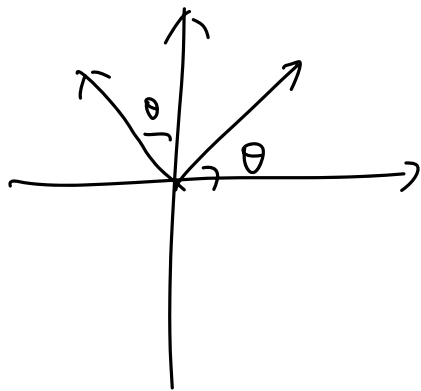
(不依赖于基, "内涵" 定义)

↑

不涉及基选取

例2: 旋转 $\bar{T}_\theta, \mathbb{R}^2$, $\beta: e_1, e_2$

$\bar{T}_\theta$ 逆时针转 θ ,



$$\bar{T}_\theta(e_1) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \bar{T}_\theta(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^2 (\bar{T}_\theta)^\beta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\underline{\left[\bar{T}_{\theta_1} \right]^\beta \cdot \left[\bar{T}_{\theta_2} \right]^\beta = \left[\bar{T}_{\theta_1 + \theta_2} \right]^\beta}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

这样证明了和角公式。

性质: $[T(v)]_C = [\bar{T}]_B^C \cdot [\bar{v}]_B$. (也可以用来证明 ①, ②)

例子: $T: P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_n(\mathbb{R})$

$f \rightarrow f'$

则 $B = \{1, x, \dots, x^n\}$

有 $[\bar{T}]_B^B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 2 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & 0 & n \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$

$T^{n+1} = 0$. $\text{rk}(\bar{T}) \leq n$

线性同构: 如果 $T: V \rightarrow W$ 线性映射是双射
则称 T 是线性同构.

性质: $T^{-1} \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(W, V)$

性质: $T \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ 是线性同构 当且仅当存在

$G \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(W, V)$. $T \circ G = \text{id}_W$, $G \circ T = \text{id}_V$.

性质: T 同构 $\Leftrightarrow \underline{[T]_B^C}$ 可逆

存在同构 $\Leftrightarrow$ 维数相同. (但同构的选取也是有意思的)

线性变换: $T: V \rightarrow V$. $\text{Hom}_K(V, V)$
记 $\text{End}_K(V, V)$

取 V 的基 B . $[T]_B^B$.

C . $P [T]_B^B P^{-1}$ $P = P_{C \leftarrow B}$

相似: $A \sim B$. if $PA P^{-1} = B$

可 well-define $\text{trace}(T)$

或者其他函数 $\text{trace}(T^2)$...
 $\text{trace}(T^n)$

子空间: 定义: V 线性空间, $W \subset V$ 非空子集

① 加法封闭

② 数乘封闭.

马念证 W 继承 V 的运算作成线性空间.

$(0 \cdot v = \vec{0}, (-1)v = -v)$ 保证了加法 0 和逆.

例子: $\{ \text{上三角阵} \} \subset M_{n \times n}(\mathbb{R})$

① $\ker$. $T: V \rightarrow W$ linear

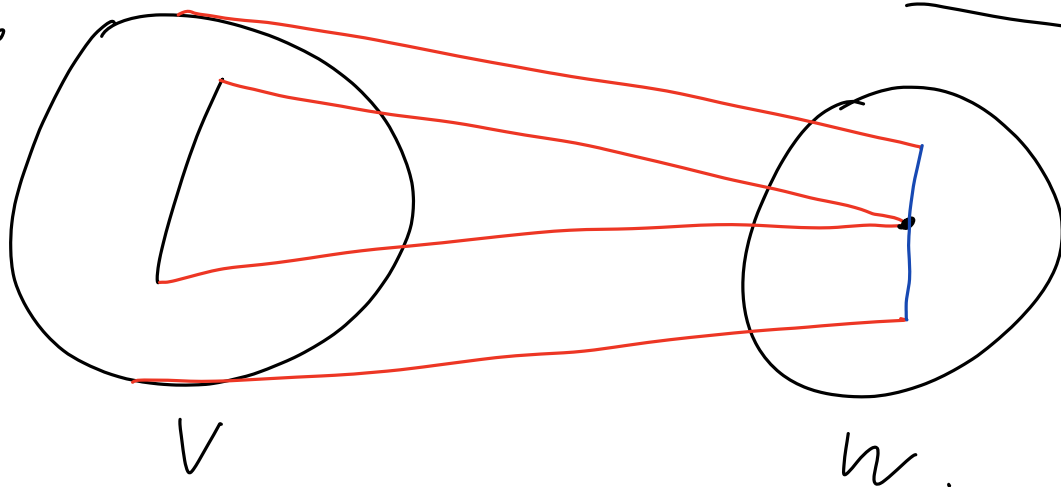
$$\ker T = \{ v \mid T(v) = 0 \}$$

② span . $\text{span}_{\mathbb{R}} \{ v_i \}_{i \in I} = \{ a_{i_1} v_{i_1} + \dots + a_{i_k} v_{i_k} \}$

③ Image . $\text{Im } T = \{ T(v) \mid v \in V \} \subset W$ (子空间)
 $\overline{T(V)} = \overline{W}$

维数守恒: $T: V \rightarrow W$. $\dim V = \underbrace{\dim \ker T} + \underbrace{\dim \text{Im } T}$

$\dim V < \infty$



证明: 取 $\ker T$ 的基, 扩充为 V 的基. (线性无关组扩充为极大组)
 $v_1, \dots, v_k, \quad v_{k+1}, \dots, v_{k+r}.$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} T &= \operatorname{span} \{ T(v_1), \dots, T(v_{k+r}) \} \\ &= \operatorname{span} \{ T(v_{k+1}), \dots, T(v_{k+r}) \} \end{aligned}$$

马金证 $T(v_{k+1}), \dots, T(v_{k+r})$ linearly independent.

定理: 对任意 $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$
 $x_0, \dots, x_n$ 互不相同, 存在多项式
 $f(x), \deg \leq n, \text{ s.t. } f(x_i) = y_i$

证明: $T: f \mapsto \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}, \ker T = \{0\}$

唯一性:

T 单射 $\Leftrightarrow \ker T = \{0\}$

子空间的和与交 .