子空间：定义：V 线性空间，$W \subset V$ 非空子集

① 加法封闭

② 数乘封闭.

可验证 W 继承 V 的运算作成线性空间.

$(0 \cdot v = \vec{0}$，$(-1)v = -v)$ 保证了加法 0 和逆.

例子：$\{$上三角阵$\} \subset M_{n\times n}(\mathbb{R})$

① ker，$T: V \to W$ linear

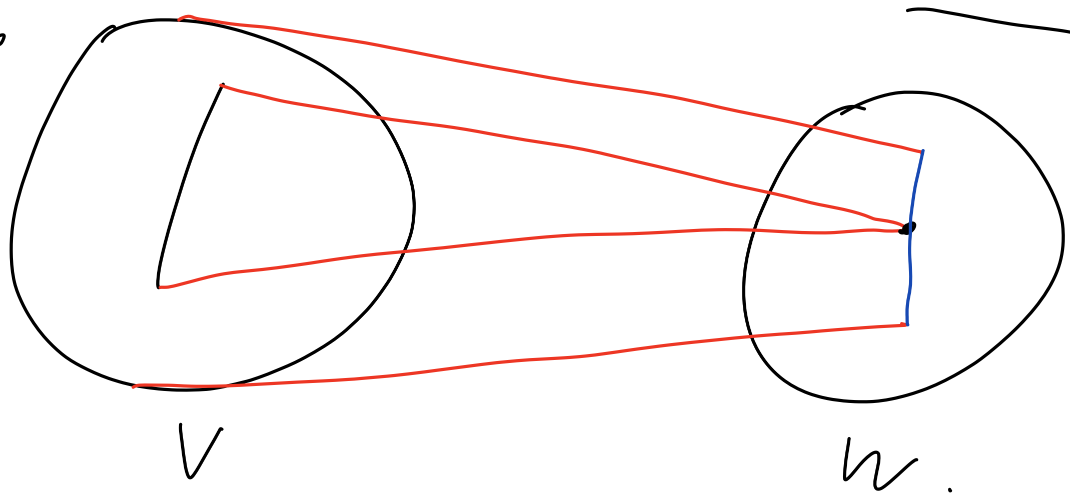
$$\ker T = \{v \mid T(v) = 0\}$$

② span. $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{v_i\}_{i\in I} = \{a_{i_1}v_{i_1} + \cdots + a_{i_k}v_{i_k}\}$

③ Image. $\mathrm{Im}\,T = \{T(v) \mid v \in V\} \subset W$ (子空间) 对子空间.

维数守恒：$T: V \to W$. $\dim V = \underline{\dim\ker T} + \underline{\dim\mathrm{Im} T}$

$\dim V < \infty$



证明：取 $\ker T$ 的基，扩充为 V 的基（线性无关组扩充为极大组）

$v_1 \cdots v_k$, $v_{k+1} \cdots v_{k+r}$.

$$\mathrm{Im}\, T = \mathrm{span}\{T(v_1), \cdots, T(v_{k+r})\}$$

$$= \mathrm{span}\,\underline{\{T(v_{k+1}), \cdots, T(v_{k+r})\}}$$

验证 $T(v_{k+1}) \cdots T(v_{k+r})$ linearly independent.

定理：对任意 $(x_0, y_0), \cdots (x_n, y_n)$

$x_0, \cdots x_n$ 互不相同，存在多项式

$f(x)$, $\deg \le n$, s.t. $f(x_i) = y_i$

证明：$T: f \mapsto \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$, $\ker T = \{0\}$

<u>唯一性</u>： T 单射 $\Leftrightarrow \ker T = \{0\}$

子空间的和与交.

$W_1, W_2 \subset V$, W_1, W_2 子空间, 则

$W_1 \cap W_2$ 是 V 的子空间. ($0 \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow W_1 \cap W_2 \neq \phi$
运算封闭)

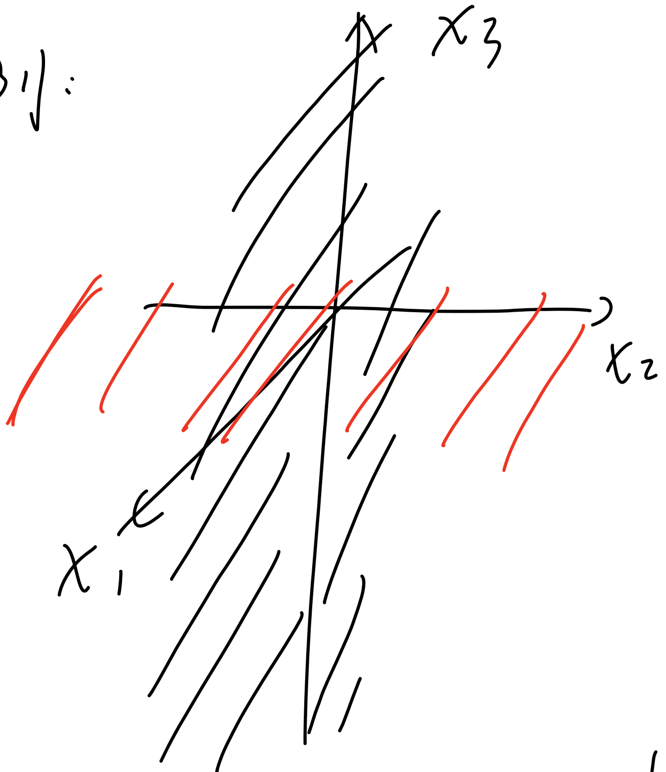
(和)

定义 $W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_i \in W_i\}$ $\left(= \mathrm{span}(W_1 \cup W_2)\right)$

易验证 $W_1 + W_2$ 是 V 的子空间, 且

注意 $W_1 \cup W_2$ 通常都不是子空间.

例:



$W_1 = \{x_2 = 0\}$

$W_2 = \{x_3 = 0\}$

$W_1 \cap W_2 = \{x_2 = x_3 = 0\}$

$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$

定理：

（维数公式：）$W_1 \subset V$, $W_2 \subset V$ 子空间，$\dim W_i < +\infty$. 则

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim \underline{W_1 \cap W_2}$$

想法：基扩张成 W_1, W_2 基.

证明：

$W_1 \cap W_2$ 有基 $v_1 \cdots v_k$.

则 $v_1 \cdots v_k$ 线性无关.

$v_1 \cdots v_k$ 可添加 $u_1 \cdots u_l$ 扩充为 W_1 的一组基

添加 $w_1 \cdots w_m$ 扩充为 W_2 的一组基.

Claim: $v_1 \cdots v_k, u_1 \cdots u_l, w_1 \cdots w_m$ 是 $W_1 + W_2$ 的基.

① $W_1 = \operatorname{span}_R(v_1 \cdots v_k, u_1 \cdots u_l)$

$W_2 = \operatorname{span}_R(v_1 \cdots v_k, w_1 \cdots w_m)$

$W_1 + W_2 = \operatorname{span}_R(W_1 \cup W_2) = \operatorname{span}_R(v_1 \cdots v_k, u_1 \cdots u_l, w_1 \cdots w_m)$

② 接下来线性无关性.

$$\underbrace{a_1v_1+\cdots+a_kv_k+b_1u_1+\cdots b_lu_l}_{=r_1\in W_1}+\underbrace{c_1w_1+\cdots c_mw_m}_{=r_2\in W_2}=0$$

则

$$r_1=-r_2\in W_1\cap W_2$$

$$\Rightarrow r_1=d_1v_1+\cdots+d_kv_k$$

$$\Rightarrow (a_1-d_1)v_1+\cdots+(a_k-d_k)v_k+b_1u_1+\cdots+b_lu_l=0$$

$$\Rightarrow b_i=0$$

$$\Rightarrow a_1v_1+\cdots+a_kv_k+c_1w_1+\cdots+c_mw_m=0$$

$$\Rightarrow a_i=0,\quad c_i=0$$

最容易错的数学式子 (MathOverflow 投票第一名)

维数没有容斥原理. (只在 W_1, W_2, 两个时成立)

$$\dim(W_1+W_2+W_3) \neq \dim(W_1)+\dim(W_2)+\dim(W_3)-\dim(W_1\cap W_2)-\dim(W_1\cap W_3)-\dim(W_1\cap W_3)+\dim(W_1\cap W_2\cap W_3)$$

注意：$(W_1+W_2)\cap W_3 \neq W_1\cap W_3 + W_2\cap W_3$

例：$\mathbb{R}^2$， $W_1=\operatorname{span}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$W_2=\operatorname{span}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$W_3=\operatorname{span}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

代入以上式子，均不符合.

引入了外直和 $\underline{V\oplus W}$. $(V\times W, +, \cdot)$

$V\oplus W$ 有子空间 $V'=\{(v,0)\mid v\in V\}\underset{同构}{\cong}V$

$T: W_1\oplus W_2 \to W_1+W_2$, $\ker T\cong W_1\cap W_2$

$(w_1, w_2)\mapsto w_1+w_2$

$\underline{W_1\cap W_2=\{0\}}$ 时，T 是同构.

定理：W_1, W_2 是 V 的子空间，$W_1\cap W_2=\{0\}$

则 T 是同构，且 T 诱导 $W_1'\cong W_1$.

$W_2'\cong W_2$.

称 W_1+W_2 为内直和.（直和 $W_1\oplus W_2$）

一般的：

线数字档律和外直和.

$T: W_1 \underset{外}{\oplus} W_2 \to V$

$(w_1, w_2)\mapsto w_1+w_2$

$\operatorname{Im} T = W_1+W_2$.

$\ker T = \{(w, -w) \mid w \in W_1 \cap W_2\}$

$\cong W_1 \cap W_2$

$\Rightarrow \dim W_1 \cap W_2 + \dim(W_1 + W_2)$

$= \dim(W_1 \underset{\text{外}}{\oplus} W_2) =$

$\dim W_1 + \dim W_2$

定义：

多个外直和 $W_1 \underset{\text{外}}{\oplus} \cdots \underset{\text{外}}{\oplus} W_n = (W_1 \times \cdots \times W_n, +$

内直和：$W_1 \underset{\text{外}}{\oplus} \cdots \underset{\text{外}}{\oplus} W_n \to W_1 + \cdots + W_n$ 是同构。

等价于 $(W_1 \oplus \cdots \oplus W_{n-1}) \oplus W_n$，归纳定义。

等价于 $(W_1 + \cdots + W_i) \cap W_{i+1} = 0$. $\forall i = 1, \ldots, n-1$.

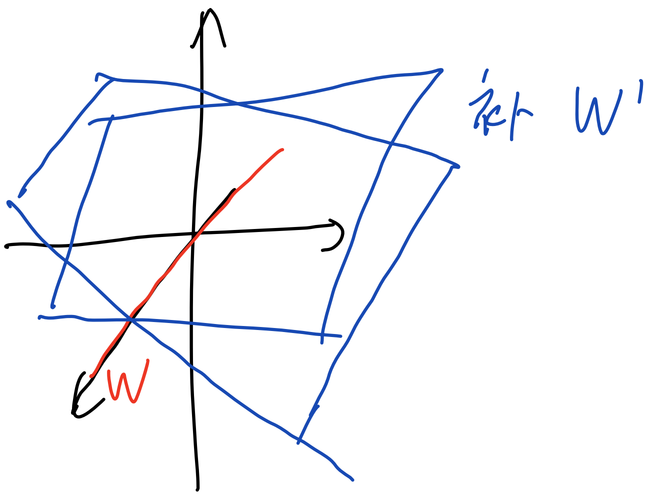
等价于 $W_j \cap W_1 + \cdots + \widehat{W_j} + \cdots + W_n = 0$. $\forall j$.

(等价性 练习)

如果 $W_1 \oplus W_2 = V$，称 W_2 是 W_1 的补空间.
(内)

性质：W 是 V 的子空间，W 的补空间存在

证明：取 W 的基，扩张…



考虑，$T: V \to W$. $\ker T$ 有补空间 $(\ker T)'$

T 满射，则有 $T|_{(\ker T)'}: (\ker T)' \xrightarrow{\sim} W$ 同构.

$(\ker T)'$ 选择太多. "不太好"

为什么？（找不到"自然"的补）

"自然" 考虑 V, W 有 $T: V \to W$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \cup & & \cup \\ V_1 & \longrightarrow & W_1 \end{array}$$

假设 $V_1 \subset V$, $W_1 \subset W$ 子空间.

$$T(V_1) \subset W_1$$

理想的 picture　T 分成两部分

$T_1: V_1 \to W_1$　　　V_2 是 V_1 的补

$T_2: V_2 \to W_2$.　　　W_2 是 W_1 的补

$$T|_{V_1} = T_1, \quad T|_{V_2} = T_2$$

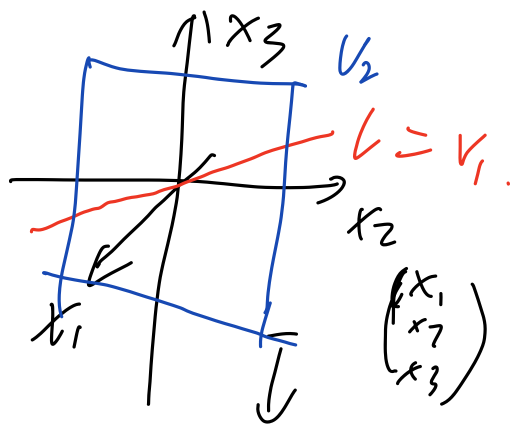
B_1, V_1 基　　　C_1, W_1 基

B_2, V_2 基.　　　C_2, W_2 基

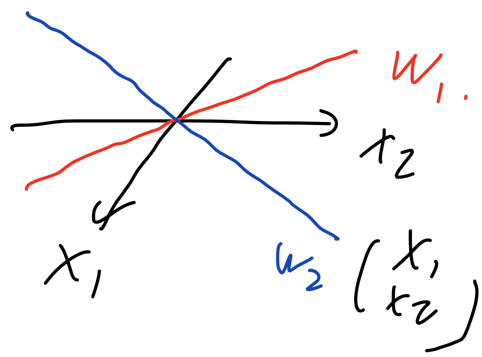
$$[T]_{(B_1,B_2)}^{(C_1,C_2)} = \left[\begin{array}{c|c} [T]_{B_1}^{C_1} & 0 \\ \hline 0 & [T]_{B_2}^{C_2} \end{array}\right]$$

能做到.（可以，但是 W_2 选取依赖于 V_2）

例如： $V = \mathbb{R}^3$



$W = \mathbb{R}^2$



W 中 W_2 的选取迁就于 V 中 V_1 的补的选取.

Y vector space, $Y_1 \subset Y$.

$$S : Y \to W.$$

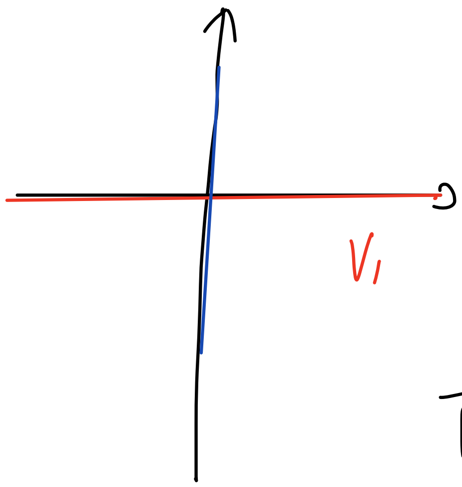
$S(Y_1) \subset W_1$

“对就”不一致.

更需要
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] & V \\ V_1 \arrow[u, phantom, "\cup" description] \arrow[r] & V_1 \arrow[u, phantom, "\cup" description] \end{tikzcd}$$

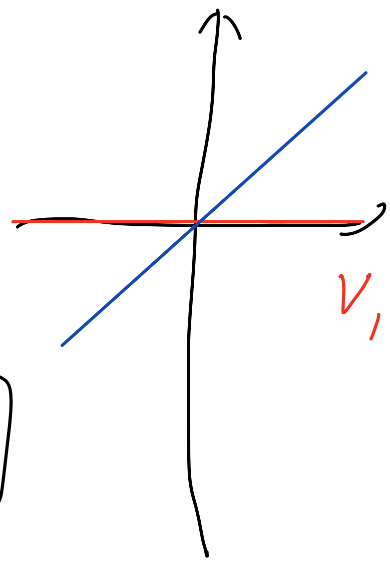
能找到到 $(V_1)' \xrightarrow{T} (V_1)'$ 吗? (不一定)

例



$V = \mathbb{R}^2$

$\longrightarrow$



$V = \mathbb{R}^2$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

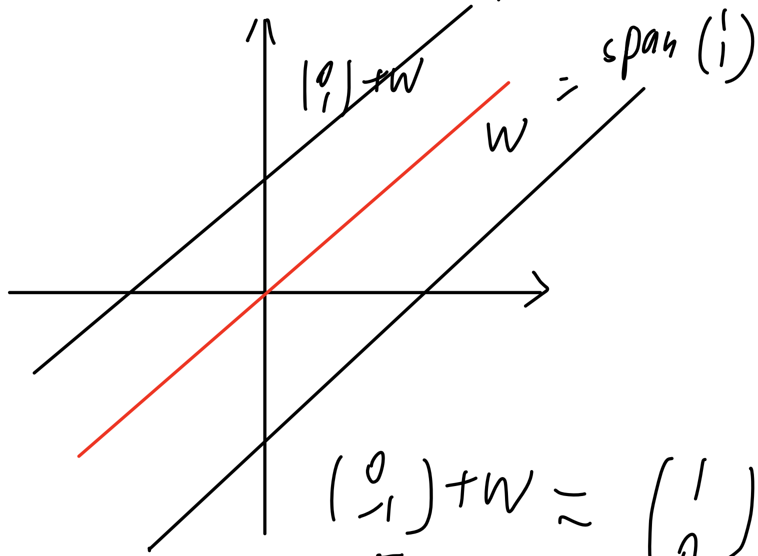
(没有基 β, $[T]_\beta^\beta$ 对角)

退而求其次, 定义商空间 (“自然”)

定义: $W \subset V$ 子空间,

V/W 作为集合: 每一个元素是 V 的子集.

$v \in V$, $\underset{\sim}{v} + W = \{v + w \mid w \in W\}$ 陪集



$\underline{\binom{0}{\underline{-1}} + W = \binom{1}{\underline{0}} + W}$

一样的 $v_1 + W$, $v_2 + W$

$v_1 \neq v_2$.

$$\boxed{v_1 + W = v_2 + W \text{ 当且仅当 } v_1 - v_2 \in W.}$$

定义 V/W 上 $(+, \cdot)$

$$\begin{cases} \underline{(v_1 + W)} + \underline{(v_2 + W)} = (v_1 + v_2) + W \\ c(v + W) = cv + W \end{cases}$$

<u>"well-defined"</u> $\underline{v_1} + W = \underline{v_1'} + W$ 时, 验证 $(v_1 + v_2) + W$

$V_1 \subset V$ $\qquad = (V_1' + V_2) + W.$

性质: ① $V \xrightarrow{\pi} V/V_1$ $\quad \pi$ 满, 且 $\ker \pi = V_1$

$v \longmapsto v + V_1$

②
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ V/V_1 \arrow[ur, dashed, "T'"'] & \end{tikzcd}$$
$\ker T \supset V_1.$

则 存在唯一的 T' ($\exists!\, T'$)

使得 $T = T' \circ \pi$

③
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] & W \\ V_1 \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "T"] & W_1 \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$
$\Rightarrow$ $\underline{V/V_1 \longrightarrow W/W_1}$

④ $V \xrightarrow{T} W.$

(同态基本定理)

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Im} T \\ V/\ker T \arrow[ur, dashed, "T'"'] & \end{tikzcd}$$

$T' : V/\ker T \to \operatorname{Im} T$ 线性同构.

推论 $\Rightarrow$ $\dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T = \dim V$

守恒律.

HW5. 思考题5. $A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $rkA=r$, $rkB=s$, $rk(A+B)=r+s$, $\exists P,Q$ 可逆 s.t. $PAQ=\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}$, $PBQ=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&I_s&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

由维数守恒给的另一个证明:

A, B 定义了 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 的线性映射 T, F

$\dim \operatorname{Im} T = r$, $\dim \operatorname{Im} F = s$

$\operatorname{Im}(T+F) \subset \operatorname{Im} T + \operatorname{Im} S$ (注意不是等号)

由维数公式 $\underbrace{\dim \operatorname{Im} T + \dim \operatorname{Im} F}_{r+s} = \underbrace{\dim(\operatorname{Im} T + \operatorname{Im} F)}_{\geq r+s} + \dim(\operatorname{Im} T\cap \operatorname{Im} F)$

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im} T\cap \operatorname{Im} F) = 0$ (*)

又 $(\ker T \cap \ker F) \subset \ker(T+F)$

$\Rightarrow \dim(\ker T + \ker F) + \underbrace{\dim(\ker T\cap \ker F)}_{\leq n-(r+s)} = \overbrace{\dim(\ker T)}^{n-r} + \underbrace{\dim(\ker F)}_{n-s}$

$\Rightarrow \dim(\ker T + \ker F) = n$.

取 $\ker T\cap \ker F$ 的基 B_3, 扩充添加 B_2 为 $\ker T$ 的基, 扩充添加 B_1 为 $\ker F$ 的基, 则 $B=(B_1, B_2, B_3)$

是 $\ker T + \ker F = \mathbb{R}^n$ 的一组基. $C_1 = T(B_1)$, $C_2 = F(B_2)$

C_1 是 $\operatorname{Im} T$ 的基, C_2 是 $\operatorname{Im} F$ 的基, 由(*)可添加

C_3 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的基, $C = (C_1, C_2, C_3)$

则 $[T]_B^C = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $[F]_B^C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

之后: 证明: $T: V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$

存在 $V_{\mathbb{C}}$ 的基, $[T]_B^B$ 是上三角阵

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. $\exists P$ 可逆.

PAP^{-1} 上三角阵.