特征值 eigenvalue

特征向量 eigenvector

线性变换 $T: V \longrightarrow V$ $/\mathbb{K}$

$\dim V = 1$. V 有基 B: $v \neq 0$.

$T(v) = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$[T]_B^B = \lambda$

$\dim V = 2$. "希望 $V = W_1 \oplus W_2$". $\dim W_i = 1$

$T(W_1) \subset W_1$

$T(W_2) \subset W_2$.

能否作到? $T: \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ $A \in M_2(\mathbb{K})$

一般不能 $v \mapsto Av$

找 $W_1 = \mathrm{span}(v)$, $v \neq 0$

$T(v) = \lambda v$. $A \cdot v = \lambda v$

$(\lambda I - A)v = 0$ 有非零解 v.

$\Leftrightarrow$ $|\lambda I - A| = 0$. $\det(\lambda I - A) = 0$

λ 满足 关于 λ 的二次方程.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

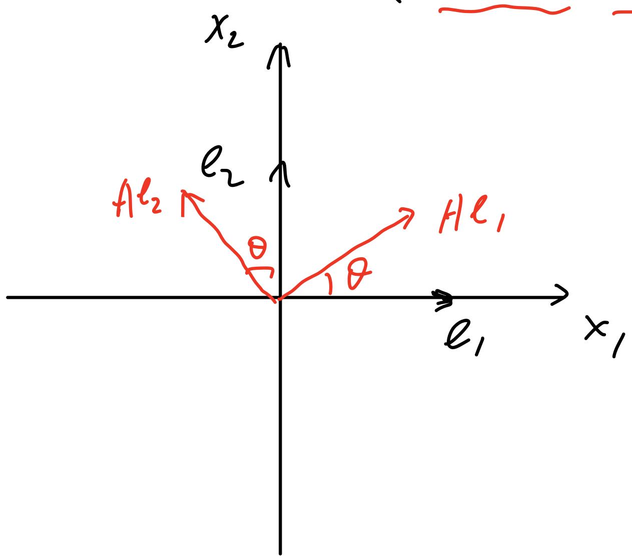
$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - \underbrace{(a+d)}_{\mathrm{Trace}(A)}\lambda + \underbrace{ad-bc}_{\det(A)} . \quad (*)$$

(*) 在 $\mathbb{K}$ 上有根.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad 0 < \theta < 2\pi$, $\theta \neq \pi$

逆时针旋转 θ.



简单起见, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\quad |\lambda I - A| = 0$ 有根

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

Case ①. $\lambda_1 \neq \lambda_2$. 则有 $\begin{cases} Av_1 = \lambda_1 v_1, & v_1 \neq 0 \\ Av_2 = \lambda_2 v_2, & v_2 \neq 0 \end{cases}$

$W_1 = \text{span}\, v_1$. $\quad W_2 = \text{span}\, v_2$

性质: v_1, v_2 线性无关.

证明: 若 $v_1 = \mu v_2$, 则

$$Av_1 = A\cdot(\mu v_2) = \mu(Av_2) = \mu\cdot\lambda_2 v_2$$
$$= \lambda_1 v_1 = \mu\cdot\lambda_1 v_2$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\mu\, v_2 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\mu = 0, \quad \Rightarrow \mu = 0$$

$$\mathbb{C}^2 = W_1 \oplus W_2.$$

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ $\quad [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

$P = [v_1, v_2]$, $\quad A(v_1, v_2) = (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2)$

$$A\cdot P = P\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Case 2. $\lambda_1 = \lambda_2$.

$|\lambda_1 I - A| = 0$.

$rk(\lambda_1 I - A) = 0$ 或 1.

2.1 $rk(\lambda_1 I - A) = 0$. $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_1 \end{bmatrix}$

2.2 $rk(\lambda_1 I - A) = 1$.

$\lambda_1 I - A \neq 0$.

$\dim \underbrace{\ker(\lambda_1 I - A)}_{\substack{\text{\textbackslash\textbackslash} \\ \mathrm{span}\, v_1}} = 1$

$\mathrm{span}\, v_1 = W_1$

扩充 v_1 为 $\mathbb{C}^2$ 的基 (v_1, v_2)

(例如: $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$ $* \neq 0$)

$A(v_1, v_2)$

$= (\lambda_1 v_1, a v_2 + b v_1)$

$T(W_1) \subset W_1$, $\dim W_1 = 1$

$A \cdot (v_1, v_2)$

$= (v_1, v_2) \underline{\begin{bmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}}$

这样的 W_1 是唯一确定的.

是否存在 W_2. $\underline{W_1 \oplus W_2} = V = \mathbb{C}^2$

$T(W_2) \subset W_2$

不存在! 若 $A v_2 = \lambda v_2$, $v_2 \neq 0$.

则 $\lambda = \lambda_1$, $v_2 \in W$,

一般的，V 是 $\mathbb{C}$ 上的有限维线性空间.

$\dim V = n$.

定理：$T: V \to V$ 存在 V 的基 B.

$$[T]_B^B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$ 上三角阵.

($A \in M_n(\mathbb{C})$，存在 P 可逆，使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$)

A 的相似矩阵.

引入记号. $A \in M_n(\mathbb{K})$，$T: V \to V$.

定义 (特征值) $Av = \lambda v$. $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq 0$

称 λ 是 A 的特征值,

v 是对应的特征向量.

($T(v) = \lambda v$, $v \neq 0$, $v \in V$)

$\ker(\lambda I - A)$ 是 A 的特征子空间.
(对于 λ)

$$\left(\ker(\lambda Id - T) \right) = \{ v \mid Tv = \lambda v,\ v \in V \}$$

证明：归纳法.

$\because A$ ∵ $|\lambda I - A| = 0$ 是关于 λ 的 n 次首一多项式.

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - & & & \\ & \lambda - & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda - \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & * \\ 0 & \lambda_2 & & \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ 0 & 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$P = (v_1, v_2 \cdots v_n)$$

$$A \cdot P = (Av_1, Av_2, \cdots Av_n)$$

$$= (v_1, v_2 \cdots v_n) \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{bmatrix}$$

$$Av_1 = \lambda_1 v_1$$

$|\lambda I - A|$ 有根 λ_1.

有 $v_1 \neq 0$, $A v_1 = \lambda_1 v_1$

v_1 扩充为 $\mathbb{C}^n$ 的基. $v_1, v_2, \cdots v_n$

$$P = [v_1 \cdots v_n]$$

$$P^{-1}AP = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right]$$

A_1 $(n-1)\times(n-1)$ 阶.

$$P_1^{-1}A_1P_1 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1^{-1} \end{pmatrix} (P^{-1}AP) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & & * & \\ \hline 0 & \lambda_2 & & * \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{array}\right]$$

"T"

$|\lambda I - A| = 0$ 有根.

$T v_1 = \lambda_1 v_1$. $W = \operatorname{span} v_1 \subset V$

$$T: \begin{array}{ccc} V & \to & V \\ \cup & & \cup \\ W & \to & W \end{array}. \qquad V \xrightarrow{T} V \to V/W$$

诱导 $\underline{V/W} \xrightarrow{\bar{T}} \underline{V/W}$

取 V/W 基 $\bar{B}$，$\overline{\text{原像}}^{\text{在}V\text{中的}}$，加上 v_1

得到 V 的基 B

$$[T]_B^B = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ 0 & [\bar{T}]_{\bar{B}}^{\bar{B}} \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right]$$

定义：(特征多项式) $|\lambda I - A| = f_A(\lambda)$

characteristic polynomial.

$$f_A(\lambda) = f_{P^{-1}AP}(\lambda)$$

$$|\lambda I - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P|$$

$$= |P^{-1}|\,|\lambda I - A|\cdot|P|$$

$$f_T(\lambda) = f_{[T]_B^B}(\lambda)$$

性质：$\{$特征值$\} = \{\lambda \mid f_A(\lambda) = 0\}$

定义： $f_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda-\lambda_s)^{m_s}$

$\lambda_1 \cdots \lambda_s$ 互不相同.

m_i 是 λ_i 的代数重数.

$\sum m_i = n$.

合理的情形，有 P. $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

定义：上述 P 存在，则称 A 可对角化的.

定义'：$T: V \to V$，存在 T 的特征向量组成 V 的基.（T 可对角化）

问题：$\underbrace{\text{如何判定？}}$

V_{λ_i} 是 λ_i 的特征子空间.

$= \ker(\lambda_i I - A)$ $\underline{\dim V_{\lambda_i} = d_i}$

V_{λ_1} 基 $v_1^1, v_2^1, \cdots v_{d_1}^1$ $d_1 = \lambda_1$ 几何重数.

V_{λ_2} $v_1^2 \cdots$ $v_{d_2}^2$

$\vdots$

V_{λ_s} $v_1^s \cdots$ $v_{d_s}^s$

$\lambda_1 \cdots \lambda_s$ 互不相同.

性质: $v_1^1, v_2^1, \cdots v_{d_1}^1, \cdots v_{d_s}^s$ 线性无关.

证明: 有线性组合

$$\underbrace{a_1^1 v_1^1 + a_2^1 v_2^1 + \cdots}_{v_1} + \cdots + \underbrace{a_{d_s}^s v_{d_s}^s}_{v_s} = 0$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_s = 0$$

$v_i \in V_{\lambda_i}$.

$$A \begin{cases} (v_1 + v_2 + \cdots + v_s) = 0 \\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_s v_s = 0 \\ \lambda_1^2 v_1 + \lambda_2^2 v_2 + \cdots + \lambda_s^2 v_s = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^{s-1} v_1 + \lambda_2^{s-1} v_2 + \cdots \lambda_s^{s-1} v_s = 0 \end{cases}$$

$$(v_1 \cdots v_s) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^{s-1} \\ 1 & \lambda_2 & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & \lambda_s & \lambda_s^2 & \lambda_s^{s-1} \end{pmatrix}}_{M.} = (0, \cdots 0)$$

$$(v_1 \cdots v_s) \underline{(M \cdot M^{-1})} = (0, \cdots 0)$$

$\Rightarrow \underline{V_i = 0}$

$\Rightarrow \underline{a^i_j = 0}$

$\left(V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s} \right)$

$\mathrm{span}(v^i_j) = W.$

$T(W) \subset W.$

v^i_j 扩充为 $\mathbb{C}^n$ 的基. B.

$$P^{-1}AP = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda_1 \cdots \lambda_1 & & 0 \\ 0 & & \lambda_s \cdots \lambda_s \end{matrix} & * \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right]$$

$$f_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{d_s} \cdot f_{A_1}(\lambda)$$

几何重数 $1 \le d_i \le m_i$.

性质: 可对角化 $\Leftrightarrow$ $d_i = m_i$.

Cayley - Hamilton 定理.

$\cdot\ h(\lambda) = \sum a_i \lambda^i$

定义：对多项式 $h(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$

可以定义 $\longrightarrow$ $h(A) = \sum_{i\geq 1} a_i A^i + a_0 \cdot I \in M_n(\mathbb{K})$

$h(T)$

$: V \to V.$

$$\underbrace{h_1(A)}_{} \cdot \underbrace{h_2(A)}_{} = (h_1 h_2)(A)$$

$\uparrow$ 矩阵乘法

$$(h_1 + h_2)(A) = \underbrace{h_1(A)} + \underbrace{h_2(A)}$$

定理：$f_A(\lambda)$ 满足 $f_A(A) = 0$

$(f_T(T) = 0$

首先：$M_n(\mathbb{K})$ n^2 维.

$I, A, A^2, \cdots A^{n^2}$ 线性相关.

有 $a_0 \cdot I + a_1 A + \cdots a_{n^2} A^{n^2} = 0$

证明：① 定义：$\mathbb{K}[\lambda] \times V \longrightarrow V$

(扩充数乘) $(h(\lambda), v) \longmapsto h(\lambda) \cdot v$

定义为 $h(T)(v)$

$$(f_1 \cdot f_2)\cdot v = f_1(f_2 \cdot v)$$

$$(f_1 + f_2) v = f_1 \cdot v + f_2 \cdot v \qquad (A)$$

$$(cf) v = c\cdot(f v)$$

$$f\cdot(v+w) = f\cdot v + f\cdot v$$

$$f\cdot(cv) = c\cdot(f v)$$

对基 $v_1 \cdots v_n$

$$\lambda\cdot(v_1 \cdots v_n) = (T(v_1) \cdots T(v_n)) = (v_1 \cdots v_n)\cdot A$$

线性组合.

$$\lambda\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = A^T\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

纯数乘　　线性组合.

$$(\lambda I - A^T)\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$M_n(\mathbb{K}[\lambda])$ 　 $\mathbb{K}(\lambda)$ 数乘

$$(\lambda I - A^T)^*(\lambda I - A^T) = |\lambda I - A| \cdot I.$$

$$(\lambda I - A^T)^* \cdot \left((\lambda I - A^T) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

数乘

$$\left((\lambda I - A^T)^* \cdot (\lambda I - A^T) \right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

矩阵乘法. 数乘

$$\begin{pmatrix} |\lambda I - A^T| & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda I - A^T| \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \underbrace{|\lambda I - AT|} \cdot v_i = 0$

$\underbrace{f_{A^T}(T)}(v_i) = 0$

$f_{AT}(T) = 0. \Rightarrow f_A(\lambda)$

代入 $\lambda = T$

$= 0.$

② A 上三角化 .(练习)

---

minimal polynomial $m(\lambda)$

$\{ g(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda] \mid \underbrace{g(A) = 0}_{\text{A 的化 0 多项式}} \} = I$

I ① 加法封闭

② 乘法吸收. $g(\lambda) \in I$,

$\forall h(\lambda)$, $h(\lambda) \cdot g(\lambda) \in I$.

取 $m(\lambda)\in I$, $m(\lambda)\neq 0$, $\deg m(\lambda)$ 最小.

Claim: $\forall\, g(\lambda)\in I$, $g(\lambda)=m(\lambda)\cdot h(\lambda)$

不然: $\left\{\begin{array}{l} g(\lambda)=m(\lambda)h(\lambda)+r(\lambda) \\ 0\neq \deg r(\lambda)<\deg m(\lambda) \end{array}\right.$

带余除法.

$m(\lambda)$ A 的 minimal polynomial.

定理: A 可对角化 $\Leftrightarrow$ $m(\lambda)$ 没有重根
(完全分解)

证明: "$\Rightarrow$" $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{bmatrix}$

$m(\lambda) \mid (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$

"$\Leftarrow$" $m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_s)$

$(A-\lambda_1 I)\cdots(A-\lambda_s I)=0$

取 $h_i(\lambda)=\dfrac{m(\lambda)}{\lambda-\lambda_i}$

$$g.c.d(h_1 \cdots h_s) = 1$$

$$k_1h_1 + \cdots + k_sh_s = 1$$

$$(k_1h_1 + \cdots + k_sh_s) \cdot v = v$$

$$v = \underbrace{(k_1h_1v)}_{v_1} + \cdots \underbrace{(k_sh_sv)}_{v_s}$$

$$v_i \in \ker(A - \lambda_i I)$$

可对角化 $\Leftrightarrow$ minimal polynomial splits and no multiple roots.

不可对角化，如何分类？！

首先定义分类：

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "f"'] & V \arrow[d, "f"] \\ W \arrow[r, "S"] & W \end{tikzcd}$$

若存在 f：$V \cong W$

使得 $S \circ f = T \circ f$，则称 $(V, T) \sim (W, S)$

$\dim V = 1$, 类 $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ F.

$\dim V = 2$, 类！ $F = \mathbb{C}$

则 $W \subset V$, $\dim W = 1$.

$$W \rightleftarrows V \rightleftarrows V/W$$

是否有 $V/W \to V$, or $V \to W$.