HW 11

1.9. $(n+1)\times(n+2)$

$$A=(a_{ij})=\left(\binom{j-1}{i-1}\right)\quad 1\le i\le n+1,\ 1\le j\le n+2$$

$A_k = A$ 去掉 k 列

$\det A_k = \binom{n+1}{k-1}$, 电子版答案另附.

---

2. 电子版

3. 1. 证明: 对 $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, 作行列变换

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Phi\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=-1$$

同理. 对任意 $E=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&&0&1&&\\&&1&0&&\\&&&&1&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}$

$\Phi(E)=-1$

所以对所有初等矩阵 E，

$$\Phi(E)=|E|$$

$$A=E_1E_2\cdots E_k\cdot A'$$

A' 上三角阵.

所以有 $\Phi(A)=\Phi(E_1)\cdots\Phi(A')$

$$=|E_1|\cdots|A'|=|A|.$$

② 成立. 对 $w=\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}$, $w^2=I$.

$(\Phi(w))^2=1$. $\Phi(w)=\pm1$.

对 $A=B_1wB_2$. B_1,B_2 上三角. (*)

有 $\Phi(A)=|B_1|\cdot\Phi(w)\cdot|B_2| \Rightarrow \Phi(A)=|A|\cdot\dfrac{\Phi(w)}{|w|}$

思考对以下 A_1,A_2,A_1A_2 有 (*) 形式的分解.

$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$

$A_1A_2=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$.

若 $\Phi(w) = 1$. (2) $\Phi(A_1) = -|A_1| \neq 0$

$\Phi(A_2) = -|A_2| \neq 0$

$$\Phi(A_1 A_2) = -|A_1||A_2| \neq 0.$$

矛盾, 所以 $\Phi(w) = |W| = -1$

$$\Rightarrow \Phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1$$

对 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, $\Phi(A) = |A| = 1$

同理: 对 n, 有 $\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}\right) = -1$

$$\Phi\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\Phi(A) = \Phi(\underbrace{E_1 \cdots E_k}_{\text{初等矩阵}} A') = |A|.$$

4. 电子版